ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КАБИНЕТ
ПО ЗАОЧНОМУ ОБУЧЕНИЮ УЧИТЕЛЕЙ

А. И. ПОГОРЕЛОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ИНТЕГРАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

УЧПЕДГИЗ · 1956

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Научно-методический кабинет по заочному обучению учителей

А. И. ПОГОРЕЛОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ИНТЕГРАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Москва ~ 1956

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1951 году был издан задачник А. И. Погорелова по интегральному исчислению и дифференциальным уравнениям, который зарекомендовал себя как хорошее пособие для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов. Первая часть этого задачника, посвящённая курсу интегрального исчисления, сохранила все свои достоинства и в настоящее время, так как изменения в программах мало затронули этот раздел математического анализа.

В настоящем издании задачник А. И. Погорелова по интегральному исчислению был подвергнут незначительным сокращениям в части задач, предлагаемых для самостоятельного решения студентами. Кроме того, были исправлены некоторые замеченные опечатки и неточности. Работа по подготовке этого издания была проделана Е. С. Куницкой.

Следует отметить, что в задачнике отсутствуют задачи на приближённое вычисление определённых интегралов и на вычисление статических моментов и координат центра тяжести плоских фигур. Поэтому при проведении практических занятий по интегральному исчислению на сессиях этим двум темам программы нужно уделить особое внимание.

В. И. Левин

Утверждено учёным советом
Научно-методического кабинета
по заочному обучению учителей

ГЛАВА ПЕРВАЯ

НЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Непосредственное интегрирование

В курсе дифференциального исчисления были выведены формулы дифференцирования элементарных функций и даны общие правила дифференцирования. Прежде чем приступить к интегрированию, студент должен хорошо знать этот материал. Обращение формул дифференцирования даёт возможность находить интегралы от некоторых функций. При решении приведённых ниже примеров следует пользоваться таблицей интегралов.

I. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, если n не равно -1.

II. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$.

III. $\int \cos u\,du = \sin u + C$.

IV. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$.

V. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$.

VI. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$.

VII. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$.

VIII. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{u}{a} + C$.

IX. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$.

Если под интегралом стоит алгебраическая сумма, то следует пользоваться формулой:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx =$$
$$= \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx - \int f_3(x)\,dx. \qquad \text{(X)}$$

Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла и вносить под знак интеграла:

$$\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx, \tag{XI}$$

где A — постоянная величина. (Переменную величину выносить за знак интеграла нельзя.)

Пример. Вычислить интеграл $\int x^4\,dx$.

Решение. Применяем формулу I, полагая в ней $u=x$, $n=4$; получаем:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int 3\cos x\,dx$.

Решение. Применяем формулы XI и III и получаем:

$$\int 3\cos x\,dx = 3\int \cos x\,dx = 3\sin x + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int (x^3 - 2\cos x + 3x - 2)\,dx$.

Решение. Применяем формулы X, XI, I и III и получаем:

$$\int (x^3 - 2\cos x + 3x - 2)\,dx = \int x^3\,dx - 2\int \cos x\,dx + $$
$$+ 3\int x\,dx - 2\int dx = \frac{1}{4}x^4 - 2\sin x + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C.$$

Вычислить интегралы.

1. $\int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{x^2}{2} + \ln x + C\right)$

2. $\int (5x^4 - 3x^2 + 2x + 1)\,dx$ (отв.: $x^5 - x^3 + x^2 + x + C$)

3. $\int \left(e^x + \frac{2}{1+x^2}\right) dx$ (отв.: $e^x + 2\,\mathrm{arc\,tg}\,x + C$)

4. $\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \csc^2 x\right) dx$ (отв.: $\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x + C$)

5. $\int \left(\sec^2 x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$ (отв.: $\mathrm{tg}\,x + \arcsin x + C$)

6. $\int (3^x - \sin x)\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{3^x}{\ln 3} + \cos x + C\right)$

7. $\int \left(10^x \cdot \ln 10 + \frac{2}{x}\right) dx$ (отв.: $10^x + 2\ln x + C$)

8. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1+x^2}\right) dx$ (отв.: $3\arcsin x + 2\,\mathrm{arc\,ctg}\,x + C$)

Пример. Вычислить интеграл $\int\left(3\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{x^3}-2x\sqrt{x}\right)dx$.

Решение. Представляем каждое слагаемое в виде степени и интегрируем сумму степеней:

$$\int\left(3\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{x^3}-2x\sqrt{x}\right)dx=3\int x^{\frac{2}{3}}\,dx+\int x^{-3}dx-2\int x^{\frac{3}{2}}\,dx=$$

$$=3\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}+\frac{x^{-2}}{-2}-2\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=\frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}-\frac{1}{2x^2}-\frac{4}{5}x^2\sqrt{x}+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{2x^5-3x-1}{x^2}dx$.

Решение. Представляем дробь в виде суммы и интегрируем:

$$\int\frac{2x^5-3x-1}{x^2}\,dx=\int\left(2x^3-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{2}x^4-3\ln x+\frac{1}{x}+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx$.

Решение. Возводим двучлен в квадрат и затем интегрируем:

$$\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx=\int\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)dx=\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{x}+C.$$

9. $\int(x^2-1)^3\,dx$ $\quad\left(\text{отв.: } \frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+x^3-x+C\right)$

10. $\int(2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x})\,dx$ $\quad\left(\text{отв.: } \frac{4}{3}x\sqrt{x}+\frac{9}{4}x\sqrt[3]{x}+C\right)$

11. $\int\left(\frac{2a}{\sqrt{x}}-\frac{b}{x^2}+3c\sqrt[3]{x^2}\right)dx$ $\quad\left(\text{отв.: } 4a\sqrt{x}+\frac{b}{x}+\frac{9}{5}cx^{\frac{5}{3}}+C\right)$

12. $\int(\sqrt{a}-\sqrt{t})^3\,dt$ $\quad\left(\text{отв.: } a^{\frac{3}{2}}t-2at^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}t^2+\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+C\right)$

В некоторых примерах сложное на первый взгляд подынтегральное выражение удаётся преобразовать и свести к основным элементарным формулам интегрирования.

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}dx$.

Решение. Числитель дроби представим в виде разности кубов, дробь сократим и затем интегрируем:

$$\int \frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx=\int \frac{1-(\sqrt[3]{x})^3}{1-\sqrt[3]{x}}=\int \frac{(1-\sqrt[3]{x})(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})}{1-\sqrt[3]{x}}\,dx=$$

$$=\int (1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})\,dx=x+\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$.

Решение. Прибавляем и вычитаем в числителе x^2 и представляем дробь в виде двух слагаемых:

$$\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}=\int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx=\int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx-\int \frac{x^2dx}{x^2(1+x^2)}=$$
$$=\int \frac{dx}{x^2}-\int \frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}-\operatorname{arc\,tg} x+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{x^4dx}{x^2+1}$.

Решение. Вычитаем и прибавляем в числителе единицу и представляем дробь в виде двух слагаемых:

$$\int \frac{x^4dx}{x^2+1}=\int \frac{x^4-1+1}{x^2+1}\,dx=\int \frac{x^4-1}{x^2+1}\,dx+\int \frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\int (x^2-1)\,dx+\int \frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{3}x^3-x+\operatorname{arc\,tg} x+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\,dx$.

Решение. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\,dx=\int \frac{1+2x+x^2}{x(1+x^2)}\,dx=\int \frac{2x\,dx}{x(1+x^2)}+$
$+\int \frac{1+x^2}{x(1+x^2)}\,dx=2\operatorname{arc\,tg} x+\ln x+C.$

Вычислить интегралы.

13. $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\,dx$ (отв.: $\sin x-\cos x+C$)

14. $\int \frac{4-x}{2+\sqrt{x}}\,dx$ $\left(\text{отв.: } 2x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C\right)$

15. $\int \frac{2+3x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx$ $\left(\text{отв.: } -\frac{2}{x}+\operatorname{arc\,tg} x+C\right)$

16. $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}\,dx$ (отв.: $2\sin x+C$)

17. $\int \frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x}\,dx$ (отв.: $\sin x-\cos x+C$)

§ 2. Метод подстановки

Если под знаком интеграла стоит выражение $F[\varphi(x)]\varphi'(x)\,dx$, т. е. даётся произведение элементарной функции от некоторой функции на дифференциал последней, например, $\sin(x^2+1)\,2x\,dx$, $(x^2+1)^8\,2x\,dx$, $\ln\varphi(x)\,d\varphi(x)$, $e^{\varphi(x)}\,d\varphi(x)$, то интеграл вычисляют методом подстановки, который вытекает из правила дифференцирования сложной функции.

Пример. Вычислить интеграл $\int\cos(x^2+1)\cdot 2x\,dx$.

Решение. Полагаем $u=x^2+1$, отсюда $du=2x\,dx$.

Выполнив подстановку, получаем:

$$\int\cos(x^2+1)\,2x\,dx=\int\cos u\,du=\sin u+C=\sin(x^2+1)+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int(x^3+1)^5x^2\,dx$.

Решение. Вводим подстановку $u=x^3+1$; отсюда $du=3x^2\,dx$. Пользуемся подстановкой и получаем:

$$\int(x^3+1)^5x^2\,dx=\frac{1}{3}\int(x^3+1)^5\cdot 3x^2\,dx=\frac{1}{3}\int u^5\,du=$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{u^6}{6}+C=\frac{1}{18}(x^3+1)^6+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int e^{x^3}x^2\,dx$.

Решение. Пользуясь подстановкой $u=x^3$, следовательно, $du=3x^2\,dx$, получаем:

$$\int e^{x^3}\cdot x^2\,dx=\frac{1}{3}\int e^{x^3}\cdot 3x^2\,dx=\frac{1}{3}\int e^u\,du=\frac{1}{3}e^u+C=\frac{1}{3}e^{x^3}+C.$$

Замечание. Обозначения и подстановки, применённые в рассмотренных примерах, упрощают вычисления интеграла, но запись решения делают довольно громоздкой. После приобретения навыка в применении этого метода все эти выкладки желательно делать устно.

Пример. Вычислить интеграл $\int\cos\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение. $\int\cos\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\int\cos\sqrt{x}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x}}=2\sin\sqrt{x}+C.$

Вычислить интегралы.

18. $\int\sin(x^2+2x+2)(x+1)\,dx$ $\left(\text{отв.: } -\frac{1}{2}\cos(x^2+2x+2)+C\right)$

19. $\int\cos(ax+b)\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{a}\sin(ax+b)+C\right)$

20. $\int e^{\sin x}\cdot\cos x\,dx$ (отв.: $e^{\sin x}+C$)

21. $\int (ax+b)^k\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{(ax+b)^{k+1}}{a(k+1)}+C\right)$

22. $\int (\sin 15x-\cos 3x)\,dx$ $\left(\text{отв.: } -\frac{1}{15}\cos 5x-\frac{1}{3}\sin 3x+C\right)$

23. $\int \sec^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$ $\left(\text{отв.: } -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+C\right)$

24. $\int \frac{dx}{2\cos^2(3x)}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{6}\operatorname{tg}3x+C\right)$

25. $\int e^{3x+5}\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{3}e^{3x+5}+C\right)$

Если подинтегральное выражение можно представить в виде произведения степени (с показателем m, не равным минус единице) на дифференциал основания, то интеграл следует вычислять по формуле:

$$\int [\varphi(x)]^m\,d\varphi(x)=\frac{[\varphi(x)]^{m+1}}{m+1}+C.$$

Пример. $\int \frac{(\operatorname{arc\,tg} x)^3\,dx}{1+x^2}=\int (\operatorname{arc\,tg} x)^3\,\frac{dx}{1+x^2}=\frac{1}{4}(\operatorname{arc\,tg} x)^4+C.$

Пример. $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx=\int \ln^3 x\cdot\frac{dx}{x}=\frac{1}{4}\ln^4 x+C.$

Пример. $\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt[5]{(x^2+2x+3)^2}}=\frac{1}{2}\int (x^2+2x+3)^{-\frac{2}{5}}\cdot 2(x+1)\,dx=$

$=\frac{5}{6}(x^2+2x+3)^{\frac{3}{5}}+C.$

Пример. $\int \frac{dx}{(\operatorname{acr\,sin} x)^3\sqrt{1-x^2}}=\int (\arcsin x)^{-3}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$

$=-\frac{1}{2(\arcsin x)^2}+C.$

26. $\int \sec^2 3x\,(\operatorname{tg}3x+1)^4\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{15}(\operatorname{tg}3x+1)^5+C\right)$

27. $\int \sin^5 x\cdot\cos x\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{6}\sin^6 x+C\right)$

28. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ (отв.: $3\sqrt[3]{\sin x}+C$)

29. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ (отв.: $-2\sqrt{1+\cos^2 x}+C$)

30. $\int \frac{x\,dx}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}$ (отв.: $(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}+C$)

31. $\int \frac{\ln^5 x\,dx}{x}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{6}\ln^6 x+C\right)$

32. $\int \cos^3 2x \sin x \cos x\,dx$ $\left(\text{отв.: } -\frac{1}{16}\cos^4 2x+C\right)$

33. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}(x^3+3x+1)^{\frac{2}{3}}+C\right)$

34. $\int \frac{\operatorname{arc\,tg}^3 x}{1+x^2}\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}^4 x+C\right)$

35. $\int \frac{dx}{\arccos^2 x\cdot\sqrt{1-x^2}}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{\arccos x}+C\right)$

36. $\int \frac{\cos x+\sin x}{(\sin x-\cos x)^2}\,dx$ $\left(\text{отв.: } -\frac{1}{\sin x-\cos x}+C\right)$

37. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C\right)$

Если подинтегральное выражение можно представить в виде дроби, в числителе которой стоит дифференциал знаменателя, т. е. дроби вида $\frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)}$, то интеграл следует вычислять по формуле:

$$\int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)}=\ln\varphi(x)+C.$$

Пример. $\int \frac{x\,dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+C.$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{2x-1}{2x+3}\,dx.$

Решение. Если в числителе рациональной дроби стоит многочлен, степень которого больше или равна степени многочлена, стоящего в знаменателе, то из дроби следует выделить целую часть, а потом интегрировать:

$$\int \frac{2x-1}{2x+3}\,dx=\int \frac{2x+3-4}{2x+3}\,dx=\int\left(\frac{2x+3}{2x+3}-\frac{4}{2x+3}\right)dx=$$

$$=\int dx-2\int\frac{2dx}{2x+3}=x-2\ln(2x+3)+C.$$

Пример. $\int \operatorname{ctg} x\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\ln\sin x+C.$

Пример. $\int\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=$(в числителе дроби стоит дифференциал знаменателя)$=\ln(e^x+e^{-x})+C.$

Пример. $\int\frac{dx}{1-x^2}=\int\frac{1-x+x}{1-x^2}dx=\int\frac{1-x}{1-x^2}dx+\int\frac{xdx}{1-x^2}=$
$=\int\frac{dx}{1+x}-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2-1}dx=\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(x^2-1)+C.$

Вычислить интегралы.

38. $\int\frac{t^{n-1}\,dt}{a+bt^n}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{nb}\ln(a+bt^n)+C\right)$

39. $\int \operatorname{tg} x\,dx$ (отв.: $-\ln\cos x+C$)

40. $\int\frac{\cos x\,dx}{1+\sin x}$ (отв.: $\ln(1+\sin x)+C$)

41. $\int\frac{dx}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}$ (отв.: $\ln(\arcsin x)+C$)

42. $\int\frac{x^3\,dx}{3x^4-5}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{12}\ln(3x^4-5)+C\right)$

43. $\int\frac{x-\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2+C\right)$

44. $\int\frac{x-1}{x+1}dx$ (отв.: $x-2\ln(x+1)+C$)

45. $\int\frac{2x^2-5}{3x+4}dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{x^2}{3}-\frac{8}{9}x-\frac{13}{27}\ln(3x+4)+C\right)$

46. $\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$ (отв.: $\ln(1+\sin^2 x)+C$)

Если подинтегральное выражение можно представить в виде дроби со знаменателем $a^2+[\varphi(x)]^2$ и числителем $d\varphi(x)$ (в числителе должен стоять дифференциал основания квадрата второго члена знаменателя), то интеграл следует вычислять по формуле:

$$\int\frac{d\varphi(x)}{a^2+[\varphi(x)]^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{\varphi(x)}{a}+C.$$

Пример. $\int\frac{e^x\,dx}{4+e^{2x}}=\int\frac{e^x\,dx}{2^2+(e^x)^2}=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{e^x}{2}+C.$

Пример. $\int\frac{\sin 2x\,dx}{1+\sin^4 x}=\int\frac{2\sin x\cos x\,dx}{1+(\sin^2 x)^2}=$ (в числителе дифференциал основания квадрата второго члена) $= \operatorname{arc\,tg}(\sin^2 x) + C$.

Пример. $\int \frac{x\,dx}{3+2x^4} = \int \frac{x\,dx}{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2}\,x^2)^2} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2\sqrt{2}\,x\,dx}{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2}\,x^2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}\,x^2}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример. $\int \frac{2\operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x}{4 + \operatorname{tg}^4 x}\,dx = \int \frac{2\operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x\,dx}{4 + (\operatorname{tg}^2 x)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C.$

47. $\int \frac{x\,dx}{x^4 + a^2}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{2a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2}{a} + C\right)$

48. $\int \frac{x^2\,dx}{x^6 + 4}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tg} \frac{x^3}{2} + C\right)$

49. $\int \frac{x^{n-1}\,dx}{x^{2n} + a^2}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{na} \operatorname{arc\,tg} \frac{x^n}{a} + C\right)$

50. $\int \frac{x\,dx}{9 + (x^2+1)^2}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tg} \frac{x^2+1}{3} + C\right)$

51. $\int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$ (отв.: $\operatorname{arc\,tg}(\ln x) + C$)

52. $\int \frac{\cos x\,dx}{25 + \sin^2 x}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{5} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sin x}{5} + C\right)$

53. $\int \frac{dx}{4 + 25x^2}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{10} \operatorname{arc\,tg} \frac{5x}{2} + C\right)$

54. $\int \frac{dx}{3 + 7x^2}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{\sqrt{21}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x\sqrt{7}}{\sqrt{3}} + C\right)$

Если подинтегральное выражение можно представить в виде дроби со знаменателем $\sqrt{a^2 - [\varphi(x)]^2}$ и числителем $d\varphi(x)$, то интеграл следует вычислять по формуле:

$$\int \frac{d\varphi(x)}{\sqrt{a^2 - [\varphi(x)]^2}} = \arcsin \frac{\varphi(x)}{a} + C.$$

(В числителе дроби должен стоять дифференциал основания квадрата второго члена.)

Пример. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4 - 9x^4}} = \frac{1}{6} \int \frac{6x\,dx}{\sqrt{2^2 - (3x^2)^2}} = \frac{1}{6} \arcsin \frac{3x^2}{2} + C.$

Пример. $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2 x}} = \int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - \operatorname{tg}^2 x}} = \arcsin \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} + C.$

Пример. $\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{2 - 3e^{2x}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\sqrt{3}\,e^x\,dx}{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}\,e^x)^2}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,e^x\right) + C.$$

Вычислить интегралы.

55. $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 5x^2}}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{x\sqrt{5}}{\sqrt{3}} + C\right)$

56. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{2} + C\right)$

57. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ (отв.: $\arcsin(\ln x) + C$)

58. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$ (отв.: $\arcsin(\sin^2 x) + C$)

Если подинтегральное выражение может быть представлено в виде дроби со знаменателем $a^2 - [\varphi(x)]^2$ и числителем $d\varphi(x)$, то интеграл следует вычислять по формуле:

$$\int \frac{d\varphi(x)}{a^2 - [\varphi(x)]^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a + \varphi(x)}{a - \varphi(x)} + C.$$

Пример. $\int \frac{dx}{3-7x^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{\sqrt{7}\, dx}{(\sqrt{3})^2 - (x\sqrt{7})^2} =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{21}} \ln \frac{\sqrt{3} + x\sqrt{7}}{\sqrt{3} - x\sqrt{7}} + C.$$

Пример. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{1-\sin^4 x} = \int \frac{\sin 2x\, dx}{1-(\sin^2 x)^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \right| + C.$

Пример. $\int \frac{dx}{3-4\sin^2 x} = \int \frac{dx}{3(\sin^2 x + \cos^2 x) - 4\sin^2 x} =$

$= \int \frac{dx}{3\cos^2 x - \sin^2 x} =$ (разделим числитель и знаменатель на $\cos^2 x$) $=$

$$= \int \frac{\sec^2 x\, dx}{3 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg} x}{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x} + C.$$

Вычислить интегралы.

59. $\int \frac{e^x\, dx}{1-e^{2x}}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{2} \ln \frac{1+e^x}{1-e^x} + C\right)$

60. $\int \frac{\cos x\, dx}{4-\sin^2 x}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{4} \ln \frac{2+\sin x}{2-\sin x} + C\right)$

61. $\int \frac{x^3\, dx}{1-x^8}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{8} \ln \frac{1+x^4}{1-x^4} + C\right)$

62. $\int \frac{\sec^2 x\, dx}{3-4\operatorname{tg}^2 x}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3}+2\operatorname{tg} x}{\sqrt{3}-2\operatorname{tg} x} + C\right)$

Если подинтегральное выражение может быть представлено в виде дроби с знаменателем $\sqrt{[\varphi(x)]^2 \pm a^2}$ и числителем $d\varphi(x)$, то интеграл следует вычислять по формуле:

$$\int \frac{d\varphi(x)}{\sqrt{[\varphi(x)]^2 \pm a^2}} = \ln[\varphi(x) + \sqrt{[\varphi(x)]^2 \pm a^2}] + C.$$

Пример: $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{4+(x^2)^2}} =$ (в числителе стоит дифференциал основания квадрата второго члена) $=$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2 + \sqrt{4+x^4}) + C.$

Пример. $\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{25\sin^2 x - 1}} = \frac{1}{5}\int \frac{5\cos x\,dx}{\sqrt{(5\sin x)^2 - 1}} =$

$= \frac{1}{5}\ln[5\sin x + \sqrt{25\sin^2 x - 1}] + C.$

Пример. $\int \frac{\sqrt{3+x^2} - \sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^4}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}} =$

$= \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} - \ln(x + \sqrt{3+x^2}) + C.$

Вычислить интегралы.

63. $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{9+x^8}}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{4}\ln(x^4 + \sqrt{9+x^8}) + C\right)$

64. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{2+x^2}} + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\right)dx$

$\left(\text{отв.: } 3\ln(x + \sqrt{2+x^2}) + 2\arcsin\frac{x}{2} + C\right)$

65. $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)dx$ $\left(\text{отв.: } \ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}} + C\right)$

66. $\int \frac{1-\sqrt{4+x^2}}{4+x^2}\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x}{2} - \ln(x + \sqrt{4+x^2}) + C\right)$

§ 3. Вычисление интегралов типа

$$\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}\,dx$$

Пример. $\int \frac{4\,dx}{x^2+x+1} = I.$ Если числитель постоянный, а в знаменателе стоит трёхчлен второй степени, то знаменатель нужно представить в виде суммы или разности квадратов:

$$I=4\int\frac{dx}{x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=4\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=\frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример. $\int\frac{3}{4x^2+4x-3}dx=I$. Числитель постоянный, а в знаменателе трёхчлен второй степени. Представим знаменатель в виде разности квадратов:

$$I=3\int\frac{dx}{(4x^2+4x+1)-4}=\frac{3}{2}\int\frac{2\,dx}{(2x+1)^2-2^2}=\frac{3}{8}\ln\frac{2-(2x+1)}{2+(2x+1)}+C=$$
$$=\frac{3}{8}\ln\frac{1-2x}{3+2x}+C.$$

Пример. $\int\frac{3x-1}{x^2-x+1}dx=I$. Если в числителе стоит линейный двучлен, а в знаменателе трёхчлен второй степени, то прежде всего нужно преобразовать числитель так, чтобы из него можно было выделить производную знаменателя. Производная знаменателя $2x-1$, а потому числитель нужно умножить на $\frac{2}{3}$ и перед интегралом ввести множитель $\frac{3}{2}$:

$$I=\frac{3}{2}\int\frac{\frac{2}{3}(3x-1)\,dx}{x^2-x+1}=\frac{3}{2}\int\frac{2x-\frac{2}{3}}{x^2-x+1}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x-1+\frac{1}{3}}{x^2-x+1}dx.$$

Интеграл представим в виде суммы двух интегралов:

$$I=\frac{3}{2}\int\frac{(2x-1)\,dx}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1)+$$
$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Пример. $\int\frac{(5x-3)\,dx}{2x^2-8x-1}=\frac{1}{2}\int\frac{(5x-3)\,dx}{x^2-4x-\frac{1}{2}}=I$. В числителе выделим производную знаменателя:

$$I=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\int\frac{\frac{2}{5}(5x-3)}{x^2-4x-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{5}{4}\int\frac{\left(2x-\frac{6}{5}\right)dx}{x^2-4x-\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{5}{4}\int\frac{2x-4+\frac{14}{5}}{x^2-4x-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{5}{4}\int\frac{2x-4}{x^2-4x-\frac{1}{2}}\,dx+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{x^2-4x-\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{5}{4}\ln\left(x^2-4x-\frac{1}{2}\right)+\frac{7}{2}\int\frac{dx}{(x-2)^2-\frac{9}{2}}=\frac{5}{4}\ln\left(x^2-4x-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\frac{7\cdot\sqrt{2}}{4\cdot 3}\ln\frac{\frac{3}{\sqrt{2}}-(x-2)}{\frac{3}{\sqrt{2}}+(x-2)}+C=\frac{5}{4}\ln\left(x^2-4x-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\frac{7}{6\sqrt{2}}\ln\frac{3-(x-2)\sqrt{2}}{3+(x-2)\sqrt{2}}+C.$$

Вычислить интегралы.

67. $\int\frac{(2x-1)\,dx}{5x^2-x+2}$

$\left(\text{отв.: } \frac{1}{5}\ln(5x^2-x+2)+\frac{8}{5\sqrt{39}}\operatorname{arc\,tg}\frac{10x-1}{\sqrt{39}}+C\right)$

68. $\int\frac{(6x^4-5x^3+4x^2)\,dx}{2x^2-x+1}$. Указание. Выделить целую часть и потом интегрировать $\left(\text{отв.: } x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{4}\ln(2x^2-x+1)+\right.$ $\left.+\frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{4x-1}{\sqrt{7}}+C\right)$

69. $\int\frac{dx}{x^2+3x+1}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}+C\right)$

70. $\int\frac{dx}{x^2+2x+1}$ $\left(\text{отв.: } -\frac{1}{x+1}+C\right)$

71. $\int\frac{2x+3}{2x^2+x+1}\,dx$

$\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}\ln(2x^2+x+1)+\frac{5}{\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{4x+1}{\sqrt{7}}+C\right)$

72. $\int\frac{(3x-2)\,dx}{x^2+3x+1}$

$\left(\text{отв.: } \frac{3}{2}\ln(x^2+3x+1)-\frac{13}{2\sqrt{5}}\ln\frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}}+C\right)$

§ 4. Вычисление интегралов типа

$$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

Пример. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-4x^2}} = I$. Если числитель не содержит переменной x, а в знаменателе под радикалом стоит трёхчлен второй степени, то этот трёхчлен нужно представить в виде суммы или разности квадратов:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4-1-4x-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(1+2x)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin\frac{1+2x}{2} + C.$$

Пример. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+9-4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+3)^2-4}} =$

$$= \ln\left[(x+3)+\sqrt{(x+3)^2-4}\right] + C = \ln\left[(x+3)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{x^2+6x+5}\right] + C$$

(см. формулу стр. 13).

Пример. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-3\left(x^2+\frac{7}{3}x+\frac{49}{36}-\frac{49}{36}\right)}} =$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{109}{12}-3\left(x+\frac{7}{6}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}\left(x+\frac{7}{6}\right)\cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{109}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{6x+7}{\sqrt{109}} + C.$$

Пример. $\int \frac{(x-2)\,dx}{\sqrt{x^2-10x+29}} = I$. Если в числителе стоит линейный двучлен, то прежде всего нужно числитель преобразовать так, чтобы из него можно было выделить производную подкоренного выражения. Производная подкоренного выражения $2x-10$, а потому числитель нужно умножить на 2 и перед интегралом ввести множитель $\frac{1}{2}$:

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-4)\,dx}{\sqrt{x^2-10x+29}} = \frac{1}{2}\int \frac{2x-10+6}{\sqrt{x^2-10x+29}} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-10)\,dx}{\sqrt{x^2-10x+29}} +$$

$$+ 3\int \frac{dx}{\sqrt{(x-5)^2+4}} = \sqrt{x^2-10x+29} + 3\ln\left[(x-5)+\right.$$

$$\left.+\sqrt{x^2-10x+29}\right] + C.$$

Пример: $\int \frac{(2x-3)\,dx}{\sqrt{8-2x-x^2}} = \int \frac{2x+2-5}{\sqrt{8-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{2x+2}{\sqrt{8-2x-x^2}}\,dx - \int \frac{5dx}{\sqrt{9-(1+x)^2}} = -2\sqrt{8-2x-x^2} - 5\arcsin\frac{1+x}{3} + C.$

Вычислить интегралы.

73. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x+5x^2}}$

$$\left(\text{отв.: } \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left[10x+1+\sqrt{20(5x^2+x+2)}\right]+C\right)$$

74. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$

$$\left(\text{отв.: } -\frac{1}{4}\sqrt{3+4x-4x^2}+\frac{7}{4}\arcsin\frac{2x-1}{2}+C\right)$$

75. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{3+4x+4x^2}}$

$$\left(\text{отв.: } \frac{1}{4}\sqrt{3+4x+4x^2}+\frac{5}{4}\ln\left(2x+1+\sqrt{3+4x+4x^2}\right)+C\right)$$

76. $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{3+66x-11x^2}}$ $\qquad \left(\text{отв.: } -\frac{1}{11}\sqrt{3+66x-11x^2}+C\right)$

77. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$ $\qquad \left(\text{отв.: } \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{5}}+C\right)$

§ 5. Метод интегрирования по частям

Этот метод опирается на равенство:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \tag{I}$$

полученное в теоретическом курсе. При вычислении интегралов важно правильно установить, каким методом интегрирования следует пользоваться. Этим методом приходится пользоваться в тех случаях, когда под знаком интеграла стоит произведение трансцендентной функции на многочлен или дробную алгебраическую функцию.

Для применения этого метода подинтегральное выражение следует представить в виде произведения одной функции на дифференциал другой функции. Если под интегралом стоит произведение логарифмической или обратной тригонометрической функции на алгебраическую, то за u следует принимать функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ и $\ln x$.

Если же под интегралом имеется произведение тригонометрической или показательной функции на алгебраическую, то за u обычно принимают алгебраическую функцию.

Пример. Вычислить интеграл $\int x \operatorname{arc\,tg} x\, dx$.

Решение. Под интегралом произведение обратной тригонометрической функции на x. Принимаем $u = \operatorname{arc\,tg} x$, $dv = x\,dx$, отсюда:

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Пользуясь равенством (I), получаем:

$$\int x \operatorname{arc\,tg} x\, dx - \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \int dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int x^2 \ln x\, dx$.

Решение. Полагаем $u = \ln x$; $dv = x^2\, dx$. Отсюда:

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{1}{3} x^3.$$

Пользуясь формулой (I), получаем:

$$\int x^2 \ln x\, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C =$$

$$= \frac{x^3}{3} \left(\ln x - \frac{1}{3} \right) + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \arcsin x\, dx$.

Решение. Принимаем $u = \arcsin x$, $dv = dx$, отсюда:

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x.$$

Пользуясь формулой (I), получаем:

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int x (\ln x)^2\, dx$.

Решение. Принимаем $u = (\ln x)^2$, $dv = x\, dx$, отсюда:

$$du = 2 \ln x \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Пользуясь равенством (I), получаем:

$\int x (\ln x)^2\, dx = \frac{x^2 (\ln x)^2}{2} - \int x \ln x\, dx = \Big($последний интеграл вычисляем по частям, полагая $u = \ln x$, $dv = x\,dx$ и, следовательно,

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \frac{x^2}{2}\Big) = \frac{x^2 (\ln x)^2}{2} - \frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x \cdot (\ln x - 1) + \frac{x^2}{4} + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int x^5 \operatorname{arc\,tg} x\,dx$.

Решение. $\int x^5 \operatorname{arc\,tg} x\,dx =$ (принимаем $u = \operatorname{arc\,tg} x$, $dv = x^5\,dx$, отсюда:

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \quad v = \frac{1}{6}x^6\Big) = \frac{1}{6}x^6 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{6}\int \frac{x^6}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{6}x^6 \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{6}\int \frac{(x^6+1)-1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{6}x^6 \operatorname{arc\,tg} x -$$

$$- \frac{1}{6}\int \left(x^4 - x^2 + 1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{1}{6}(x^6+1)\operatorname{arc\,tg} x -$$

$$- \frac{1}{6}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x\right) + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Решение. $\int \frac{x \arcsin x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \Big($ принимаем $u = \arcsin x$, $dv = \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$, отсюда:

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = -\sqrt{1-x^2}\Big) = -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + \int dx =$$

$$= x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C.$$

Пример. $\int x^2 \sin x\,dx =$ (принимаем $u = x^2$, $dv = \sin x\,dx$, отсюда:

$du = 2x\,dx$, $v = -\cos x) = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\,dx =$ (последний интеграл вычисляем по частям, полагая $u = x$, $dv = \cos x\,dx$ и, следовательно, $du = dx$, $v = \sin x) = -x^2 \sin x + 2x \sin x - 2\int \sin x\,dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$.

Пример. $\int e^{-x^2} x^3\,dx =$ (полагаем $u = x^2$, $dv = e^{-x^2} x\,dx$; отсюда:

$$du = 2x\,dx, v = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big) = -\frac{x^2}{2}e^{-x^2} + \int x e^{-x^2}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1) + C.$$

Вычислить интегралы.

78. $\int x \ln x\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C\right)$

79. $\int \arccos x\,dx$ $(\text{отв.: } x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C)$

80. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$ $\left(\text{отв.: } x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C\right)$

81. $\int \ln(x+a)\,dx.$ $(\text{отв.: } (x+a)\ln(x+a) - x + C)$

82. $\int x \sin x\,dx$ $(\text{отв.: } -x\cos x + \sin x + C)$

83. $\int x^2 \cos x\,dx$ $(\text{отв.: } (x^2-2)\sin x + 2x\cos x + C)$

84. $\int e^{-x}\cdot x\,dx$ $(\text{отв.: } -e^{-x}(x+1) + C)$

85. $\int e^{2x}x^3\,dx$ $\left(\text{отв.: } e^{2x}\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}\right) + C\right)$

86. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$

$(\text{отв.: } x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C)$

87. $\int \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)\,dx}{1+x^2}$ $(\text{отв.: } \operatorname{arctg} x(\ln|\operatorname{arctg} x| - 1) + C)$

88. $\int \frac{\ln x\,dx}{(1+x)^2}$ $\left(\text{отв.: } \ln\frac{x}{1+x} - \frac{\ln x}{1+x} + C\right)$

Если под интегралом стоит произведение $\sin x$ или $\cos x$ на показательную функцию, или тригонометрическая функция от логарифма, или другие подобные выражения, то в результате многократного интегрирования по частям иногда можно получить уравнение относительно искомого интеграла.

Пример. $\int e^x \cos x\,dx = I$. Полагаем $u = e^x$, $dv = \cos x\,dx$; отсюда:

$du = e^x dx$, $v = \sin x$, $I = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$. Последний интеграл вычисляем по частям, полагая $u = e^x$, $dv = \sin x\,dx$ и, следовательно,

$du = e^x dx$, $v = -\cos x$, $I = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx$.

Итак,

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x(\sin x + \cos x) - \int e^x \cos x\,dx.$$

Переносим последний интеграл в левую часть уравнения:

$$2\int e^x \cos x\,dx = e^x(\sin x + \cos x) + C$$

и, решая уравнение, получаем:

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + C.$$

Пример. $\int \cos(\ln x)\, dx = I$. Полагаем $u = \cos \ln x$, $dv = dx$ и, следовательно,

$$du = -\sin(\ln x)\frac{dx}{x},\quad v = x,\quad I = x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx.$$

В последнем интеграле полагаем $u = \sin(\ln x)$, $dv = dx$ и отсюда:

$$du = \cos(\ln x)\frac{dx}{x},\ v = x,\ I = x\cos(\ln x) +$$

$$+ x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx.$$

Итак,

$$\int \cos(\ln x)\, dx = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] - \int \cos(\ln x)\, dx,$$

$$2\int \cos(\ln x)\, dx = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C$$

и, следовательно,

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C}{2}.$$

Вычислить интегралы.

89. $\int e^x \sin x\, dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C\right)$

90. $\int \sin(\ln x)\, dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{2} x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C\right)$

91. $\int e^{-ax} \cos bx\, dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{b\sin bx - a\cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} + C\right)$

92. $\int e^x \cos^2 x\, dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{e^x}{5}(\cos^2 x + 2\sin x\cos x + 2) + C\right)$

Пример. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = I$. Перенесём иррациональность в знаменатель:

$$I = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx = \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Второй интеграл вычисляем по частям, полагая $u = x$, $dv = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ и, следовательно,

$$du = dx,\quad v = -\sqrt{a^2 - x^2},\quad I = a^2 \arcsin\frac{x}{a} +$$

$$+ x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

Итак,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Отсюда:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right) + C.$$

93. $\int \sqrt{1 + x^2}\,dx$

$$\left(\text{отв.: } \frac{x}{2}\sqrt{1 + x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + C\right)$$

94. $\int \sqrt{a - bx^2}\,dx$

$$\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}x\sqrt{a - bx^2} + \frac{a}{2\sqrt{b}}\arcsin\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + C\right)$$

§ 6. Интегрирование рациональных функций

Пусть под интегралом стоит рациональная дробь $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ — многочлены. Мы будем предполагать, что степень многочлена $P_1(x)$ меньше степени многочлена $P_2(x)$ и коэффициент при члене с наибольшим показателем в знаменателе равен единице. В тех случаях, когда степень числителя больше или равна степени знаменателя, необходимо выделить целую часть, разделив числитель на знаменатель.

1-й случай. Корни знаменателя — действительные числа: a_1, a_2, a_3, ..., a_n, и ни один из них не повторяется, т. е. $P_2(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$.

В этом случае дробь можно представить в виде суммы элементарных дробей, т. е.

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \frac{A_3}{x - a_3} + \ldots + \frac{A_n}{x - a_n}, \qquad \text{(I)}$$

где коэффициенты A_1, A_2, ..., A_n — постоянные.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{(x-1)\,dx}{(x+1)(x^2-4)}$.

Решение. Под интегралом дана рациональная дробь. Степень числителя ниже степени знаменателя, и знаменатель имеет действительные различные корни.

Пользуясь равенством (I), получаем:

$$\frac{x - 1}{(x + 1)(x^2 - 4)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 2}, \qquad (1)$$

или

$$\frac{x-1}{(x+1)(x^2-4)}=\frac{A(x^2-4)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-2)}.$$

Теперь нужно подобрать коэффициенты так, чтобы дроби были равны тождественно, а следовательно, чтобы имело место тождество:

$$x-1=A(x^2-4)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x+2). \qquad (2)$$

Для вычисления коэффициентов A, B, C пользуемся методом неопределённых коэффициентов. Раскрываем скобки в правой части последнего равенства и располагаем члены по степеням x:

$$x-1=(A+B+C)x^2+(3C-B)x+(2C-2B-4A).$$

Если многочлены тождественно равны, то равны коэффициенты при одинаковых степенях x. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений:

коэффициенты при x^2	$0=A+B+C,$
„ „ x	$1=3C-B,$
„ „ x^0	$-1=2C-2B-4A.$

Решая систему, находим: $A=\frac{2}{3}$, $B=-\frac{3}{4}$, $C=\frac{1}{12}$.

Подставляя найденные значения в равенство (1), получаем

$$\frac{x-1}{(x+1)(x^2-4)}=\frac{\frac{2}{3}}{x+1}+\frac{-\frac{3}{4}}{x+2}+\frac{\frac{1}{12}}{x-2}.$$

Если знаменатель дроби имеет действительные различные корни, то коэффициенты удобнее и быстрее вычислять иначе.

Применим второй способ для вычисления тех же коэффициентов. Берём равенство:

$$x-1=A(x^2-4)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x+2) \qquad (2)$$

и подставляем вместо x значения -1, -2, 2.

Каждое из этих чисел обращает в нуль два члена правой части равенства. Вообще при применении этого способа следует вместо x подставлять такие числа, которые обращают в нуль ряд членов правой части.

Из равенства (2), выполняя подстановку, получаем:

при $x=-1$	$-2=-3A,$
„ $x=-2$	$-3=4B,$
„ $x=2$	$1=12C.$

Отсюда:

$$A=\frac{2}{3}, \quad B=-\frac{3}{4}, \quad C=\frac{1}{12}.$$

Теперь можно вычислить интеграл:

$$\int \frac{(x-1)\,dx}{(x+1)(x^2-4)} = \int \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{x-2}\right)dx =$$
$$= \frac{2}{3}\ln(x+1) - \frac{3}{4}\ln(x+2) + \frac{1}{12}\ln(x-2) + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $I = \int \frac{x^4-3x^2-3x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx.$

Решение. Так как степень числителя выше степени знаменателя, то нужно выделить целую часть. Разделив числитель на знаменатель, получим:

$$\frac{x^4-3x^2-3x-1}{x^3-x^2-2x} = x+1-\frac{x+1}{x(x^2-x-2)}.$$

Следовательно,

$$I = \int \frac{x^4-3x^2-3x-1}{x^3-x^2-2x}\,dx = \int (x+1)\,dx - \int \frac{(x+1)\,dx}{x(x-2)(x+1)}.$$

Под вторым интегралом стоит рациональная дробь, знаменатель которой имеет действительные различные корни. Пользуясь равенством (I), получаем:

$$\frac{x+1}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}.$$

Отсюда:

$$x+1 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2). \qquad (3)$$

Подставляя в равенство (3) значения $x=0$, $x=-1$, $x=2$, получаем:

при $x=0$	$\frac{1}{2} = -2A,$
„ $x=-1$	$0 = 3C,$
„ $x=2$	$3 = 6B.$

Отсюда:

$$A = -\frac{1}{2},\quad C=0,\quad B=\frac{1}{2}.$$

Итак:

$$I = \int (x+1)\,dx - \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{0}{x+1}\right)dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} + x + \ln x - \frac{1}{2}\ln(x-2) + C.$$

Вычислить интегралы.

95. $\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x-3)}$

$\left(\text{отв.: } \frac{1}{4}\ln(x+1) - \frac{2}{5}\ln(x+2) + \frac{3}{20}\ln(x-3) + C\right)$

96. $\int \frac{(5x^2-3)\,dx}{(x-2)(3x^2+2x-1)}$

$$\left(\text{отв.: } \frac{7}{15}\ln(x-2)+\frac{1}{5}\ln(3x-1)-\frac{2}{3}\ln(x+1)+C\right)$$

97. $\int \frac{dx}{x^4-3x^2+36}$ $\quad\left(\text{отв.: } \frac{1}{30}\ln\frac{x-3}{x+3}+\frac{1}{20}\ln\frac{x+2}{x-2}+C\right)$

98. $\int \frac{(2x^2+5)\,dx}{(x-2)(x+3)(x-4)}$

$$\left(\text{отв.: } -\frac{13}{10}\ln(x-2)+\frac{23}{35}\ln(x+3)+\frac{37}{14}\ln(x-4)+C\right)$$

99. $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)}$

$$\left(\text{отв.: } \frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\frac{x-1}{(x+1)^3}+\frac{16}{3}\ln(x+2)+C\right)$$

2-й случай. Знаменатель рациональной дроби $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ имеет действительные кратные корни: $a_1, a_2, \ldots, a_k$, т. е. $P_2(x)=$ $=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_k)^{\alpha_k}$.

В этом случае рациональная дробь может быть представлена в виде суммы:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}=\frac{A_1}{(x-a_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_2}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha_1}}{x-a_1}+\frac{B_1}{(x-a_2)^{\alpha_2}}+$$
$$+\frac{B_2}{(x-a_2)^{\alpha_2-1}}+\ldots+\frac{B_{\alpha_2}}{x-a_2}+\ldots+\frac{F_1}{(x-a_k)^{\alpha_k}}+$$
$$+\frac{F_2}{(x-a_k)^{\alpha_k-1}}+\ldots+\frac{F_{\alpha_k}}{x-a_k}, \qquad \text{(II)}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_{\alpha_1}, B_1, B_2, \ldots, B_{\alpha_2}, \ldots, F_1, F_2, \ldots, F_{\alpha_k}$ — постоянные коэффициенты.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{(x-1)\,dx}{x^2(x-2)(x+1)^2}$.

Решение. Степень числителя ниже степени знаменателя. Знаменатель имеет действительные кратные корни. Пользуясь равенством (II), получаем:

$$\frac{x-1}{x^2(x-2)(x+1)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{F}{x+1}.$$

Приводим правую часть к общему знаменателю и приравниваем числители:

$$x-1=A(x-2)(x+1)^2+Bx(x-2)(x+1)^2+Cx^2(x+1)^2+$$
$$+Dx^2(x-2)+Fx^2(x+1)(x-2).$$

В правой части раскрываем скобки и группируем члены по степеням x:

$$x-1=(B+C+F)x^4+(A+2C+D-F)x^3+$$
$$+(-3B+C-2D-2F)x^2+(-3A-2B)x+(-2A).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\begin{array}{c|l} x^4 & B+C+F=0, \\ x^3 & A+2C+D-F=0, \\ x^2 & -3B+C-2D-2F=0, \\ x & -3A-2B=1, \\ x^0 & -1=-2A. \end{array}$$

Решив систему, получим:

$$A=\frac{1}{2}, \quad B=-\frac{5}{4}, \quad C=\frac{1}{36}, \quad D=\frac{2}{3}, \quad F=\frac{11}{9}.$$

Итак,

$$\frac{x-1}{x^2(x-2)(x+1)^2}=\frac{\frac{1}{2}}{x^2}-\frac{\frac{5}{4}}{x}+\frac{\frac{1}{36}}{x-2}+\frac{\frac{2}{3}}{(x+1)^2}+\frac{\frac{11}{9}}{x+1}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{(x-1)\,dx}{x^2(x-2)(x+1)^2}=-\frac{1}{2x}-\frac{5}{4}\ln x-\frac{1}{36}\ln(x-2)-$$
$$-\frac{2}{3(x+1)}+\frac{11}{9}\ln(x+1)+C.$$

Вычислить интегралы.

100. $\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$ $\left(\text{отв.: } -\frac{x}{(x-1)^2}+\ln\frac{(x-1)^2}{x}+C\right)$

101. $\int\frac{(x-8)\,dx}{x^3-4x^2+4x}$ $\left(\text{отв.: } \frac{3}{x-2}+\ln\frac{(x-2)^2}{x^2}+C\right)$

102. $\int\frac{dx}{(x+1)^3(x-1)^2}$

$$\left(\text{отв.: } \frac{3(x-1)}{16(x+1)}-\frac{x+1}{16(x-1)}-\frac{(x-1)^2}{32(x+1)^2}+\frac{3}{16}\ln\frac{x+1}{x-1}+C\right)$$

103. $\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx$

$$\left(\text{отв.: } \frac{1}{4}\ln\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{2(x-2)}+C\right)$$

104. $\int\frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2}dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{x+3}{2(1-x^2)}+\ln\frac{x^2}{\sqrt[4]{(x+1)^5(x-1)^3}}+C\right)$

3-й случай. Знаменатель рациональной дроби $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ (многочлен с действительными коэффициентами) имеет как действительные, так и комплексные корни, причём среди комплексных корней нет повторяющихся. В этом случае знаменатель может быть представлен в виде произведения линейных множителей и множителей второй степени:

$$P_2(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\dots(a_1x^2+b_1x+c_1)\dots$$
$$\dots(a_kx^2+b_kx+c_k),$$

так как произведение двух линейных комплексных сопряжённых множителей равно квадратному трёхчлену с действительными коэффициентами:

$$[x-(a+bi)][x-(a-bi)]=[(x-a)-bi][(x-a)+bi]=$$
$$=x^2-2ax+a^2+b^2.$$

Дробь, стоящая под интегралом, может быть представлена в виде суммы:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}=\frac{P_1\ (x)}{(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\dots(a_1x^2+b_1x+c_1)\dots(a_kx^2+b_kx+c_k)}=$$
$$=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\dots+\frac{A_{\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+$$
$$+\dots+\frac{B_{\alpha_2}}{(x-x_2)^{\alpha_2}}+\dots+\frac{C_1x+D_1}{a_1x^2+b_1x+c_1}+\dots+\frac{C_kx+D_k}{a_kx^2+b_kx+c_k}, \quad \text{(III)}$$

где $A_1, A_2, \dots, A_{\alpha_1}, B_1, B_2, \dots, B_{\alpha_2}, \dots, C_1, C_2, \dots, D_k$ — постоянные коэффициенты.

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{x\,dx}{(x^2-1)(x^2+1)}$.

Решение. Знаменатель имеет два действительных корня $x_1=1$, $x_2=-1$ и два различных комплексных корня $x_3=i$, $x_4=-i$, а потому может быть представлен в виде произведения:

$$(x-1)(x+1)(x+i)(x-i)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

действительных множителей первой и второй степеней.

Пользуясь равенством III, получаем:

$$\frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Приводим правую часть к общему знаменателю и приравниваем числители дробей:

$$x=A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1).$$

Представляя правую часть в виде многочлена, расположенного по степеням x, получаем:

$$x=(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+$$
$$+(A-B-D).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\begin{array}{lll|l} \text{коэффициенты} & \text{при} & x^3 & A+B+C=0, \\ \text{"} & \text{"} & x^2 & A-B+D=0, \\ \text{"} & \text{"} & x & A+B-C=1, \\ \text{"} & \text{"} & x^0 & A-B-D=0. \end{array}$$

Решив систему, получаем:

$$A=\frac{1}{4}, \quad B=\frac{1}{4}, \quad C=-\frac{1}{2}, \quad D=0.$$

Отсюда:

$$\frac{x}{(x^2-1)(x^2+1)}=\frac{\frac{1}{4}}{x-1}+\frac{\frac{1}{4}}{x+1}-\frac{\frac{1}{2}x}{x^2+1}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2-1)(x^2+1)}=\int\left(\frac{1}{4}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}-\frac{x}{2(x^2+1)}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{4}\ln(x-1)+\frac{1}{4}\ln(x+1)-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C=$$
$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{x\,dx}{x^3+1}$.

Решение. Знаменатель имеет один действительный и два комплексных сопряжённых корня, а потому может быть представлен в виде произведения действительных множителей первой и второй степени. Пользуясь равенством (III), получаем:

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Приводим правую часть к общему знаменателю и приравниваем числители:

$$x=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1).$$

Отсюда:

$$x=(A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений:

$$\begin{array}{lll|r} \text{коэффициенты} & \text{при} & x^2 & A+B=0, \\ \text{"} & \text{"} & x & -A+B+C=1, \\ \text{"} & \text{"} & x^0 & A+C=0. \end{array}$$

Решив систему, получаем:

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{1}{3}.$$

Таким образом,

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{-\frac{1}{3}}{x+1} + \frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2 - x + 1}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x\,dx}{x^3+1} = -\frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{(x+1)\,dx}{x^2-x+1} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{6}\int \frac{2x+2}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{3}\ln(x+1) +$$

$$+ \frac{1}{6}\int \frac{2x-1+3}{x^2-x+1}\,dx = -\frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{6}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = -\frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}$.

Решение. Знаменатель имеет четыре различных комплексных корня. Пользуясь равенством (III), получаем:

$$\frac{x+1}{(x^2+x+2)\,(x^2+4x+5)} = \frac{Ax+B}{x^2+x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+4x+5}.$$

Правую часть приводим к общему знаменателю и приравниваем числители:

$$x+1 = (Ax+B)(x^2+4x+5) + (Cx+D)(x^2+x+2).$$

Отсюда:

$$(x+1) = (A+C)x^3 + (4A+B+C+D)x^2 +$$
$$+ (5A+4B+2C+D)x + (5B+2D).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений:

коэффициенты	при	x^3	$A + C = 0,$
»	»	x^2	$4A + B + C + D = 0,$
»	»	x	$5A + 4B + 2C + D = 1,$
»	»	x^0	$5B + 2D = 1.$

Решив систему, получаем:

$$A = 0, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = 0, \quad D = -\frac{1}{3}.$$

Таким образом:

$$\frac{x+1}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}=\frac{\frac{1}{3}}{x^2+x+2}+\frac{-\frac{1}{3}}{x^2+4x+5}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{(x+1)\,dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+x+2}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+2)^2+1}=\frac{2}{3\sqrt{7}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}-$$

$$-\frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}(x+2)+C.$$

Вычислить интегралы.

105. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}x-\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+C\right)$

106. $\int\frac{(7x^2-1)\,dx}{x^4+4x^2-5}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+\frac{6}{\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C\right)$

107. $\int\frac{(3x^2-2)\,dx}{9x^4-13x^2+4}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{10}\ln\frac{3x^2-5x+2}{3x^2+5x+2}+C\right)$

4-й случай. Знаменатель рациональной дроби $\frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ имеет как действительные, так и комплексные корни, причём среди комплексных корней есть повторяющиеся. В этом случае знаменатель может быть представлен в виде произведения:

$$P_2(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x-x_k)^{\alpha_k}(a_1x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\ldots$$
$$\ldots(a_mx^2+b_mx+c_m)^{\beta_m},$$

где

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k+2(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_m)=n,$$

т. е. сумма показателей равна степени многочлена.

В этом случае дробь может быть представлена в виде суммы:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}=\frac{P_1(x)}{(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x-x_k)^{\alpha_k}(a_1x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\ldots(a_mx^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}}=$$

$$=\frac{A_1^{(1)}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}+\frac{A_2^{(1)}}{(x-x_1)^{\alpha_1-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha_1}^{(1)}}{x-x_1}+\ldots+\frac{A_1^{(k)}}{(x-x_k)^{\alpha_k}}+$$

$$+\frac{A_2^{(k)}}{(x-x^{(1)})^{\alpha_k-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha_k}^{(k)}}{x-x_k}+\frac{C_1^{(1)}x+D_1^{(1)}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}}+$$

$$+\frac{C_2^{(1)}x+D_2^{(1)}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1}}+\ldots+\frac{C_{\beta_1}^{(1)}x+D_{\beta_1}^{(1)}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)}+$$

$$+\dots+\frac{C_1^{(m)}x+D_1^{(m)}}{(a_mx^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}}+\frac{C_2^{(m)}x+D_2^{(m)}}{(a_mx^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}}+$$

$$+\dots+\frac{C_{\beta_m}^{(m)}x+D_{\beta_m}^{(m)}}{(a_mx^2+b_mx+c_m)}, \qquad \text{(IV)}$$

где $A_1^{(1)},\dots, A_{\alpha_1}^{(1)},\dots, A_1^{(k)},\dots, C_{\beta_m}^{(m)}, D_{\beta_m}^{(m)}$ — постоянные коэффициенты.

При вычислении интегралов, относящихся к данному случаю, приходится вычислять интегралы вида $\int\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}dx$, которые берутся по формуле, выведенной ранее.

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{x^7+x^5+x^3+x}{(x^2+2)^2(x^2+3)^2}dx$.

Решение. Так как знаменатель имеет кратные комплексные корни, то дробь может быть разложена по формуле (IV):

$$\frac{x^7+x^5+x^3+x}{(x^2+2)^2(x^2+3)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2}+\frac{Ex+F}{(x^2+3)^2}+\frac{Mx+N}{x^2+3}.$$

Приводим правую часть к общему знаменателю и приравниваем числители правой и левой частей:

$$x^7+x^5+x^3+x=(Ax+B)(x^2+3)^2+$$
$$+(Cx+D)(x^2+2)(x^2+3)^2+(Ex+F)(x^2+2)^2+$$
$$+(Mx+N)(x^2+3)(x^2+2)^2.$$

В правой части производим умножение и располагаем многочлен по убывающим степеням x:

$$x^7+x^5+x^3+x=x^7(C+M)+x^6(D+N)+$$
$$+x^5(A+8C+E+7M)+x^4(B+8D+F+7N)+$$
$$+x^3(6A+21C+4E+16M)+x^2(6B+21D+4F+16N)+$$
$$+x(9A+18C+4E+12M)+(9B+18D+4F+12N).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях в правой и левой частях и получаем систему уравнений:

$$\begin{array}{ll}
C+M=1 & 6A+21C+4E+16M=1\\
D+N=0 & 6B+21D+4F+16N=0\\
A+8C+E+7M=1 & 9A+18C+4E+12M=1\\
B+8D+F+7N=0 & 9B+18D+4F+12N=0.
\end{array}$$

Решая систему, находим:

$$F=D=B=N=0,\quad A=-5,\quad C=19,\quad M=-18,\quad E=-20.$$

Теперь можно вычислить интеграл:

$$\int\frac{x^7+x^5+x^3+x}{(x^2+2)^2(x^2+3)^2}\,dx=\int\frac{-5x}{(x^2+2)^2}\,dx+\int\frac{19x}{x^2+2}\,dx+\int\frac{-20x}{(x^2+3)^2}dx+$$
$$+\int\frac{-18x}{x^2+3}\,dx=\frac{5}{2(x^2+2)}+\frac{19}{2}\ln(x^2+2)+\frac{10}{x^2+3}-9\ln(x^2+3)+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$.

Решение. Пользуясь формулой (IV), представим данную дробь в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2+1}.$$

Приведём к общему знаменателю правую часть и приравняем числители правой и левой частей:

$$4x^2-8x=A(x^2+1)^2+B(x-1)(x^2+1)^2+$$
$$+(Cx+D)(x-1)^2+(Ex+F)(x^2+1)(x-1)^2.$$

Выполняем умножение в правой части равенства и располагаем многочлен по убывающим степеням x:

$$4x^2-8x=x^5(B+E)+x^4(A-B-2E+F)+$$
$$+x^3(2B+C+2E-2F)+x^2(2A-2B-2C+D-2E+2F)+$$
$$+x(B+C-2D+E-2F)+(A-B+D+F).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях в правой и левой частях и получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&B+E=0 && 2A-2B-2C+D-2E+2F=4\\
&A-B-2E+F=0 && B+C-2D+E-2F=-8\\
&2B+C+2E-2F=0 && A-B+D+F=0.
\end{aligned}$$

Решая систему, находим:

$$A=-1,\ B=2,\ C=-2,\ D=4,\ E=-2,\ F=-1.$$

Подставляем найденные значения и вычисляем интеграл:

$$\int\frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\int\frac{-dx}{(x-1)^2}+\int\frac{2dx}{x-1}+\int\frac{-2x+4}{(x^2+1)^2}dx+$$
$$+\int\frac{-2x-1}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{x-1}+2\ln(x-1)+\frac{1}{x^2+1}+4\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}-$$
$$-\ln(x^2+1)-\operatorname{arc\,tg}x. \qquad (1)$$

Вычислим интеграл:

$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int\frac{(1+x^2-x^2)\,dx}{(x^2+1)^2}=\operatorname{arc\,tg}x-\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$ (последний интеграл берём по частям)$=\operatorname{arc\,tg} x+\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x=\frac{x}{2(x^2+1)}+$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C.$$

Подставляем найденный результат в равенство (1) и получаем:

$$\int\frac{(4x^2-8x)\,dx}{(x-1)^2(x^2+1)^2}=\frac{1}{x-1}+2\ln(x-1)+\frac{1}{x^2+1}+\frac{2x}{x^2+1}+$$

$$+2\operatorname{arc\,tg} x-\ln(x^2+1)-\operatorname{arc\,tg} x+C=\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\operatorname{arc\,tg} x+$$

$$+\frac{3x^2-x}{(x-1)(x^2+1)}+C.$$

Вычислить интегралы.

108. $\int\frac{2x\,dx}{(1+x)(1+x^2)^2}\left(\text{отв.: }-\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\right.$

$$\left.+\frac{x-1}{2(x^2+1)}+C\right).$$

109. $\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2}\left(\text{отв.: }\frac{1}{4}\left(\frac{x+1}{x^2+1}+\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}+2\operatorname{arc\,tg} x\right)+C\right).$

110. $\int\frac{dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}\quad\left(\text{отв.: }-\frac{1}{3}\frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)}+\right.$

$$\left.+\frac{1}{9}\ln(x^2+x+1)+\frac{2\sqrt{3}}{9}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{9}\ln(x-1)+C\right).$$

В некоторых случаях при интегрировании рациональных дробей можно получить нужный результат, не прибегая к общим правилам, рассмотренным выше, а пользуясь простейшими преобразованиями. Характер преобразований приходится устанавливать отдельно для каждого случая.

Рассмотрим несколько примеров на интегрирование рациональных функций при помощи целесообразных преобразований.

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x^2-x^3}$.

Решение. $\int\frac{dx}{x^2-x^3}=\int\frac{1-x^2+x^2}{x^2(1-x)}\,dx=\int\frac{1-x^2}{x^2(1-x)}\,dx+$

$$+\int\frac{x^2}{x^2(1-x)}\,dx=\int\frac{1+x}{x^2}\,dx+\int\frac{dx}{1-x}=-\frac{1}{x}+$$

$$+\ln x-\ln(1-x)+C.$$

Пример. $\int\frac{(x^3+3x)\,dx}{x^4+4x^2+8}=\frac{1}{4}\int\frac{4x^3+12x}{x^4+4x^2+8}\,dx=$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{4x^3+8x+4x}{x^4+4x^2+8}\,dx=\frac{1}{4}\int\frac{4x^3+8x}{x^4+4x^2+8}\,dx+\int\frac{x\,dx}{(x^2+2)^2+4}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(x^4+4x^2+8)+\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{x^2+2}{2}+C.$$

Пример. $\int \frac{dx}{x^8+x^6} = \int \frac{1+x^2-x^2}{x^6(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2}{x^6(1+x^2)}dx -$
$- \int \frac{x^2}{x^6(1+x^2)}dx = -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{dx}{x^4(1+x^2)} = -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{1+x^2-x^2}{x^4(1+x^2)}dx =$
$= -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{dx}{x^4} + \int \frac{dx}{x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \int \frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}dx =$
$= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \operatorname{arc\,tg} x + C.$

Пример. $\int \frac{x^5dx}{(1-x^2)^5} = \int \frac{x^5-x^3+x^3}{(1-x^2)^5}dx = \int \frac{x^3(x^2-1)}{(1-x^2)^5}dx +$
$+ \int \frac{x^3dx}{(1-x^2)^5} = -\int \frac{x^3dx}{(1-x^2)^4} + \int \frac{x^3-x+x}{(1-x^2)^5}dx = -\int \frac{x^3dx}{(1-x^2)^4} -$
$- \int \frac{x(1-x^2)\,dx}{(1-x^2)^5} + \int \frac{x}{(1-x^2)^5}dx = -\int \frac{x^3dx}{(1-x^2)^4} - \int \frac{xdx}{(1-x^2)^4} + \frac{1}{8(1-x^2)^4} =$
$= \frac{1}{8(1-x^2)^4} - \int \frac{x^3+x}{(1-x^2)^4}dx = \frac{1}{8(1-x^2)^4} - \int \frac{x^3-x+2x}{(1-x^2)^4}dx =$
$= \frac{1}{8(1-x^2)^4} + \frac{1}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{3(1-x^2)^3} + C.$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$.

Решение. Этот интеграл вычислим при помощи интегрирования по частям. Полагаем $u=x,\ dv=\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$, отсюда: $du=dx$ и $v=-\frac{1}{2(x^2+1)}$. Пользуясь формулой интегрирования по частям, получаем:

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \int \frac{dx}{2(x^2+1)} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Пользуясь преобразованиями, вычислить интегралы.

111. $\int \frac{dx}{x^6-x^4}$ $\left(\text{отв.:} \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1} + C\right)$

112. $\int \frac{dx}{x^4+x}$ $\left(\text{отв.:}\ \ln x - \frac{1}{3}\ln(x^3+1) + C\right)$

113. $\int \frac{dx}{x^3(1-x^2)^2}$ $\left(\text{отв.:} \frac{1}{2(1-x^2)} - \frac{1}{2x^2} + \ln\frac{x^2}{1-x^2} + C\right)$

§ 7. Интегрирование некоторых классов иррациональных функций

Если под знаком интеграла стоит иррациональная функция, то в ряде случаев удаётся, пользуясь преобразованием переменной, привести подинтегральную функцию к рациональному виду и вычисление заданного интеграла свести к вычислению интеграла рациональной функции.

Ниже перечислены те классы иррациональных функций, которые после соответствующего преобразования переменной могут быть сведены к рациональным функциям.

1-й случай. Если под знаком интеграла стоит рациональная функция от дробных степеней независимой переменной x, т. е. функция $R\left(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{k}{r}}, \ldots, x^{\frac{e}{s}}\right)$, то такая функция всегда может быть преобразована в рациональную форму при помощи подстановки $x=z^m$, где m есть общее наименьшее кратное всех знаменателей дробных показателей x, т. е. m есть общее наименьшее кратное чисел $q, r, \ldots, s$.

Таким образом, указанный выше приём применим к интегралам типа

$$\int R\left(x, x^{\frac{p}{q}}, x^{\frac{k}{r}}, \ldots, x^{\frac{e}{s}}\right) dx.$$

Пример. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx.$

Решение. Под интегралом стоит рациональная функция от дробных степеней x. Общее наименьшее кратное знаменателей 3, 4 и 2 равно 12, а потому полагаем $x=z^{12}$, $dx=12z^{11}dz$. Подставив в подинтегральное выражение x и dx, получаем:

$$\int \frac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}}dx=\int \frac{(z^{12})^{\frac{2}{3}}-(z^{12})^{\frac{3}{4}}}{(z^{12})^{\frac{1}{2}}}\,12z^{11}dz=\int \frac{z^8-z^9}{z^6}\cdot 12z^{11}dz=$$

$=12\int (z^{13}-z^{14})\,dz=\frac{6}{7}z^{14}-\frac{4}{5}z^{15}+C=$ (подставляем значение $\left.z=x^{\frac{1}{12}}\right)=\frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}}-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}+C.$

Этот интеграл можно было вычислить быстрее, если свести его к интегрированию степенных функций, разделив числитель на знаменатель.

Пример. Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}\,dx.$

Решение. Полагаем $x=z^6$, $dx=6z^5dz$ и получаем:

$$\int \frac{z^6+z^4+z}{z^6(1+z^2)}\cdot 6z^5dz=6\int \frac{z^3(1+z^2)+1}{1+z^2}\,dz=6\int z^3dz+6\int \frac{dz}{1+z^2}=$$

$$=\frac{3}{2}z^4+6\operatorname{arc\,tg} z+C=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+6\operatorname{arc\,tg}\sqrt[6]{x}+C.$$

Вычислить интегралы.

114. $\int \frac{1-2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}dx$ (отв.: $-x+2\sqrt{x}-\ln(1+2\sqrt{x})+C$)

115. $\int \frac{3\sqrt{x}\,dx}{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}$ $\left(\text{отв.: } -18\left[\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}+\frac{4x^{\frac{1}{2}}}{3}+4x^{\frac{1}{3}}+\right.\right.$

$$\left.\left.+16x^{\frac{1}{6}}+32\ln\left(x^{\frac{1}{6}}-2\right)\right]+C\right)$$

116. $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x^7}+\sqrt[4]{x^5}}dx$ $\left(\text{отв.: } -\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+\frac{12}{\sqrt[12]{x}}+2\ln x-\right.$

$$\left.-24\ln\left(\sqrt[12]{x}+1\right)+C\right)$$

117. $\int \frac{\sqrt{x}\;dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$ $\left(\text{отв.: } 2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}+3\ln\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}+C\right)$

2-й случай. Если под знаком интеграла стоит рациональная функция от x и дробных степеней дробно линейной функции $\frac{ax+b}{cx+d}$, т. е. $R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{k}{l}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right]$, то подстановкой $\frac{ax+b}{cx+d}=z^n$, где n есть общее наименьшее кратное знаменателей $l, \ldots, s$, данная функция будет преобразована в рациональную форму.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}}$.

Решение. Полагаем $1+x=z^2$, следовательно, $dx=2\,zdz$ и получаем:

$$\int \frac{dx}{(1+x)^{\frac{3}{2}}+(1+x)^{\frac{1}{2}}}=\int \frac{2\,zdz}{z^3+z}=\int \frac{2dz}{1+z^2}=2\operatorname{arc\,tg} z+C=$$
$$=2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{1+x}+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{1}{(1-x)^2}\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}dx$.

Решение. Полагаем $\frac{1+x}{1-x}=z^3$. Определяем отсюда x через z и получаем $1+x=z^3-xz^3$, $x(1+z^3)=z^3-1$, $x=\frac{z^3-1}{1+z^3}$,

$$dx=\frac{6z^2}{(1+z^3)^2}dz,\ 1-x=1-\frac{z^3-1}{1+z^3}=\frac{2}{1+z^3}.$$

Заменяя в подинтегральном выражении x через z, получаем:

$$\int \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} dx = \int \frac{1}{\left(\frac{2}{1+z^3}\right)^2} \cdot z \cdot \frac{6z^2}{(1+z^3)^2} dz = \frac{3}{2} \int z^3 dz =$$

$$= \frac{3}{8} z^4 + C = \frac{3}{8} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{4}{3}} + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2 (x-1)^4}}$.

Решение. Прежде всего нужно преобразовать подинтегральную функцию так, чтобы под знаком радикала стояла дробно линейная функция. Вынося за знак радикала произведение $(x+1)(x-1)$, получаем:

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x-1) \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}}. \qquad (1)$$

Полагая $\frac{x-1}{x+1} = z^3$, находим:

$$x = \frac{1+z^3}{1-z^3}, \quad dx = \frac{6z^2}{(1-z^3)^2} dz, \quad x+1 = \frac{1+z^3}{1-z^3} + 1 = \frac{2}{1-z^3},$$

$$x-1 = \frac{1+z^3}{1-z^3} - 1 = \frac{2z^3}{1-z^3}.$$

Заменяя в подинтегральном выражении (1) x через z, получаем

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x-1) \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}} = \int \frac{6z^2 dz}{(1-z^3)^2 \cdot \frac{2}{1-z^3} \cdot \frac{2z^3}{1-z^3} \cdot z} = \frac{3}{2} \int \frac{dz}{z^2} =$$

$$= -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{z} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Преобразуем подинтегральную функцию так, чтобы под радикалом стояла дробно линейная функция:

$$\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{(1-x)(1+x)}} =$$

$$= \int \frac{dx}{(1-x)(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}. \qquad (1)$$

Полагаем $\frac{1-x}{1+x}=z^2$, откуда:

$$x=\frac{1-z^2}{1+z^2},\ dx=\frac{-4zdz}{(1+z^2)^2},\quad 1-x=1-\frac{1-z^2}{1+z^2}=\frac{2z^2}{1+z^2},$$

$$1+x=1+\frac{1-z^2}{1+z^2}=\frac{2}{1+z^2}.$$

Заменяя в (1) x через z, получаем:

$$\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{dx}{(1-x)(1+x)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}=$$

$$=-\int\frac{4zdz}{(1+z^2)^2\cdot\frac{2z^2}{1+z^2}\cdot\frac{2}{1+z^2}\cdot z}=-\int\frac{dz}{z^2}=\frac{1}{z}+C=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

Вычислить интегралы.

118. $\int\frac{1}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{3}{8}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)}+C\right)$

119. $\int\frac{x^2dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$ $\left(\text{отв.: } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\arcsin x+C\right)$

120. $\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$ (отв.: $x+1+4\sqrt{x+1}+$
$+4\ln(\sqrt{x+1}-1)+C$)

121. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$ $\left(\text{отв.: } \frac{2}{3(a-b)}\left((x+a)^{\frac{3}{2}}-\right.\right.$
$\left.\left.-(x+b)^{\frac{3}{2}}\right)+C\right)$

122. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^7}}$ $\left(\text{отв.: } \frac{3}{16}(3x-5)\sqrt[3]{\frac{x+1}{(x-1)^4}}+C\right)$

3-й случай. Интегралы типа $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$.

a) Если под знаком интеграла содержатся только радикалы вида $\sqrt{ax^2+bx+c}$, при условии $a>0$, то подинтегральное выражение можно представить в рациональной форме при помощи подстановки $\sqrt{ax^2+bx+c}=z-x\sqrt{a}$ (подстановка Эйлера).

Замечание. Следует отметить, что эта подстановка часто приводит к очень громоздким выкладкам, а потому пользоваться ею следует только в крайних случаях, т. е. тогда, когда трудно указать другие способы для вычисления данного интеграла. Это же замечание относится и к подстановкам, которые даются далее при рассмотрении случаев *b* и *c*.

Рассмотрим примеры, относящиеся к этому случаю.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$.

Решение. Под интегралом не содержится иных радикалов, кроме радикала указанного выше вида, и при этом $a=1>0$. Преобразуем подинтегральное выражение в рациональную форму, пользуясь подстановкой $\sqrt{1+x+x^2}=z-x$. (1)

Возвышая в квадрат обе части равенства (1), выразим x через z:

$$1+x+x^2=z^2-2zx+x^2,\ x(1+2z)=z^2-1,\ x=\frac{z^2-1}{1+2z}.$$

Следовательно,

$$dx=\frac{2(z^2+z+1)\,dz}{(2z+1)^2} \text{ и } \sqrt{1+x+x^2}=z-\frac{z^2-1}{1+2z}=\frac{z^2+z+1}{1+2z}.$$

Выполнив подстановку, получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}=\int \frac{2(z^2+z+1)(2z+1)\,dz}{(2z+1)^2(z^2+z+1)}=\int \frac{2dz}{2z+1}=$$
$$=\ln(2z+1)+C=\ln\left(2\sqrt{1+x+x^2}+2x+1\right)+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$.

Решение. Данный интеграл принадлежит к указанному выше типу и может быть вычислен при помощи подстановки Эйлера, но в этом случае удобнее применить подстановку $x=\frac{1}{z}$, тогда $dx=-\frac{dz}{z^2}$.

Выполнив подстановку, получим:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}=\int \frac{-\frac{dz}{z^2}}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}-1}}=-\int \frac{dz}{\sqrt{1+z-z^2}}=$$
$$=-\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}}=-\arcsin\frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}+C=$$
$$=-\arcsin\frac{2z-1}{\sqrt{5}}+C=-\arcsin\frac{2-x}{x\sqrt{5}}+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{15}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

Решение. Пользуясь подстановкой Эйлера, получаем:

$$\sqrt{1+x^2}=z-x.$$

Отсюда:

$$x=\frac{z^2-1}{2z},\ dx=\frac{z^2+1}{2z^2}\,dz,\ \sqrt{1+x^2}=\frac{z^2+1}{2z}.$$

Выполнив подстановку, получим:

$$\int \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{15}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{\left(\frac{z^2-1}{2z}+\frac{z^2+1}{2z}\right)^{15}\cdot\frac{z^2+1}{2z^2}}{\frac{z^2+1}{2z}}\,dz =$$

$$= \int \frac{z^{15}dz}{z} = \int z^{14}dz = \frac{1}{15}z^{15}+C = \frac{1}{15}(x+\sqrt{1+x^2})^{15}+C.$$

Вычислить интегралы.

123. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}$ $\left(\text{отв.: } \ln\frac{x+\sqrt{1+x+x^2}}{2+x+\sqrt{1+x+x^2}}+C\right)$

124. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+2}}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{x^2-x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2-x+2}+x+\sqrt{2}}+C\right)$

125. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$ $\left(\text{отв.: } 2\,\mathrm{arc\,tg}\,(x+\sqrt{x^2+2x-1})+C\right)$

126. $\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\right.$

$\left.-\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x-1})+C\right)$

127. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$ $\left(\text{отв.: } \ln\frac{x}{2+x+2\sqrt{x^2+x+1}}+C\right)$

b) Если под знаком интеграла содержатся только радикалы вида $\sqrt{ax^2+bx+c}$, то при условии $c>0$ подинтегральное выражение можно привести к рациональному виду при помощи подстановки $\sqrt{ax^2+bx+c}=xz-\sqrt{c}$ (подстановка Эйлера).

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

Решение. В данном примере подинтегральное выражение содержит только радикалы указанного вида, причём $c=1>0$, а потому применим подстановку $\sqrt{1+x-x^2}=xz-1$. Отсюда определяем x, возвышая обе части равенства в квадрат. Получаем:

$$1+x-x^2=x^2z^2-2xz+1;\quad 1-x=xz^2-2z;\quad x=\frac{1+2z}{1+z^2}.$$

Следовательно,

$$dx=\frac{2(1-z-z^2)}{(1+z^2)^2}dz,\quad 1+x=1+\frac{1+2z}{1+z^2}=\frac{2+2z+z^2}{1+z^2},$$

$$\sqrt{1+x-x^2}=z\cdot\frac{1+2z}{1+z^2}-1=\frac{z^2+z-1}{1+z^2}.$$

Выполнив подстановку, получим:

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{2(1-z-z^2)(1+z^2)(1+z^2)\,dz}{(1+z^2)^2(2+2z+z^2)(z^2+z-1)} =$$

$$= -\int \frac{2dz}{z^2+2z+2} = -2\int \frac{dz}{(z+1)^2+1} = -2\operatorname{arctg}(z+1)+C =$$

$$= -2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1+x-x^2}+1+x}{x}+C.$$

Вычислить интегралы.

128. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2}+\right.$

$\left. +2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C\right)$

129. $\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{-x^2+x+4}}dx$ $\left(\text{отв.: } \left(-\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\right)\sqrt{-x^2+x+4}+\right.$

$\left. +\frac{31}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{17}}+C\right)$

130. $\int \frac{xdx}{\sqrt{2+4x-x^2}}$ $\left(\text{отв.: } -\sqrt{2+4x-x^2}+2\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{6}}+C\right)$

c) Если под знаком интеграла содержатся только радикалы вида $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и α и β — действительные корни трёхчлена ax^2+bx+c, то подинтегральное выражение можно привести к рациональному виду при помощи подстановки

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}=(x-\alpha)\cdot z$ (подстановка Эйлера).

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}}$.

Решение. Трёхчлен x^2+3x-4 имеет два действительных корня $x_1=1$ и $x_2=-4$, а следовательно, интеграл можно вычислить с помощью подстановки

$$\sqrt{x^2+3x-4}=\sqrt{(x+4)(x-1)}=(x+4)z.$$

Возвышаем в квадрат обе части последнего равенства и определяем x:

$$(x+4)(x-1)=(x+4)^2\cdot z^2;\quad x-1=(x+4)z^2;\quad x=\frac{1+4z^2}{1-z^2}.$$

Отсюда:

$$dx=\frac{10zdz}{(1-z^2)^2},\quad \sqrt{x^2+3x-4}=\left(\frac{1+4z^2}{1-z^2}+4\right)\cdot z=\frac{5z}{1-z^2},\quad x+4=$$

$$=\frac{1+4z^2}{1-z^2}+4=\frac{5}{1-z^2}.$$

Выполнив подстановку, получим:

$$\int \frac{dx}{(x+4)\sqrt{x^2+3x-4}} = \int \frac{10z\,dz}{(1-z^2)^2 \frac{5}{1-z^2} \cdot \frac{5z}{1-z^2}} = \frac{2}{5} \int dz =$$

$$= \frac{2}{5} \frac{\sqrt{x^2+3x-4}}{x+4} + C = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{x-1}{x+4}} + C.$$

Вычислить интегралы.

131. $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{-3+4x-x^2}}$ $\left(\text{отв.: } \ln \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{3-x}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}} + C\right)$

132. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$ $\left(\text{отв.: } -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x-3}} + C\right)$

133. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$ $\left(\text{отв.: } -2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1-x}{x+2}\right)^{\frac{1}{2}} + C\right)$

134. $\int \frac{(x^2+1)\,dx}{\sqrt{-x^2+3x-2}}$

$\left(\text{отв.: } -\left(\frac{1}{2}x + \frac{9}{4}\right)\sqrt{-x^2+3x-2} + \frac{27}{8} \arcsin(2x-3) + C\right)$

Задачи смешанного характера на интегрирование иррациональных функций.

135. $\int \sqrt[3]{\frac{(x+1)^5}{(x-1)^2}}\,dx$

$$\left(\text{отв.: } \frac{2z^5}{(z^3-1)^2} + \frac{10z^2}{3(z^3-1)} + \frac{10}{9}\ln(z^2+z+1) - \frac{20}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2z+1}{\sqrt{3}} - \right.$$

$$\left. - \frac{20}{9}\ln(z-1) + C, \quad \text{где} \quad z = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)$$

136. $\int \frac{(x+1)\,dx}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}$ $\left(\text{отв.: } -\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}} + C\right)$

137. $\int \frac{dx}{(1-\sqrt{1-x^2})^2}$

$$\left(\text{отв.: } -\frac{1}{6z^3} + \frac{1}{2z} + C, \text{ где } z = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

138. $\int \frac{1-\sqrt{1+x+x^2}}{x\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$ $\left(\text{отв.: } \ln \frac{2+x-2\sqrt{1+x+x^2}}{x^2} + C\right)$

139. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{1+x}}$

(отв.: $2\sqrt{1+x}+3\sqrt[3]{1+x}+6\sqrt[6]{1+x}-\ln(1+\sqrt[6]{1+x})+C$)

140. $\int\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}\,dx$

(отв.: $(\sqrt{x}-2)\sqrt{1-x}-\arcsin\sqrt{x}+C$)

141. $\int\frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$ $\left(\text{отв.: } \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}+C\right)$

142. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}}$

$\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2}-\sqrt{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+C, \text{ где } z=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

В некоторых случаях вычисление интеграла иррациональной функции может быть выполнено без применения указанных выше подстановок. Рассмотрим один способ вычисления без помощи подстановок.

Пример. Вычислить интеграл $\int\sqrt{x^2-2x-1}\,dx$.

Решение. Для того чтобы данный интеграл свести к простейшему случаю, вычисление проведём по следующей схеме:

1. Применим к данному интегралу метод интегрирования по частям, полагая $dx=du$, $v=\sqrt{x^2-2x-1}$ и, следовательно, $x=u$, $dv=\frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x^2-2x-1}}$.

Получим:

$$\int\sqrt{x^2-2x-1}\,dx=x\sqrt{x^2-2x-1}-\int\frac{(x^2-x)\,dx}{\sqrt{x^2-2x-1}}. \quad (1)$$

2. В данном интеграле иррациональность переведём в знаменатель:

$$\int\sqrt{x^2-2x-1}\,dx=\int\frac{x^2-2x-1}{\sqrt{x^2-2x-1}}\,dx. \quad (2)$$

3. Сложим равенства (1) и (2) и получим:

$2\int\sqrt{x^2-2x-1}\,dx=x\sqrt{x^2-2x-1}-\int\frac{(x^2-x)\,dx}{\sqrt{x^2-2x-1}}+$ $+\int\frac{(x^2-2x-1)\,dx}{\sqrt{x^2-2x-1}}$ (сумму двух последних интегралов заменим одним) $=x\sqrt{x^2-2x-1}-\int\frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2-2x-1}}=x\sqrt{x^2-2x-1}-$ $-\int\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-1}}+\frac{2}{\sqrt{(x-1)^2-2}}\right)dx=x\sqrt{x^2-2x-1}-$ $-\sqrt{x^2-2x-1}-2\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right)+C.$

Разделив на два обе части последнего равенства, получим:

$$\int \sqrt{x^2-2x-1}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right)+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$.

Решение. 1. Данный интеграл вычисляем по частям, полагая $du=dx$, $v=\sqrt{a^2+x^2}$ и, следовательно, $u=x$, $dv=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$. Получим:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx=x\sqrt{a^2+x^2}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}. \tag{1}$$

2. В данном интеграле иррациональность перенесём в знаменатель:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx=\int\frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}dx. \tag{2}$$

3. Сложив равенства (1) и (2) и разделив обе части на два, получим:

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{a^2dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=$$
$$=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2+x^2}+a^2\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right]+C.$$

Пользуясь указанным выше способом, вычислить интегралы.

143. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$

$$\left(\text{отв.: } \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)+C\right)$$

144. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C\right)$

145. $\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$

$$\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}\left[(x-1)\sqrt{2x-x^2}+\arcsin(x-1)\right]+C\right)$$

146. $\int \sqrt{x^2-4x+1}\,dx$

$$\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-4x+1}-\frac{3}{2}\ln\left(x-2+\sqrt{x^2-4x+1}\right)+C\right)$$

Ниже изложен метод интегрирования одного важного класса иррациональных функций, предложенный одним из величайших русских математиков — П. Л. Чебышевым (1821—1894).

Дифференциал вида $x^m (a+bx^n)^p\,dx$, где a и b — какие угодно постоянные, а показатели n, m, p — числа рациональные, называется биномиальным дифференциалом. П. Л. Чебышев доказал, что если под знаком интеграла стоит биномиальный дифференциал, то интеграл выражается в элементарных функциях в следующих случаях:

1-й случай. a) Если p — целое положительное число, то под интегралом нужно раскрыть скобки по правилу бинома Ньютона и затем вычислять полученный интеграл.

Пример. $\int \sqrt{x}\,(1+\sqrt[3]{x})^4\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^4 dx =$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}\left(1+4x^{\frac{1}{3}}+6x^{\frac{2}{3}}+4x+x^{\frac{4}{3}}\right)dx = \int\left(x^{\frac{1}{2}}+4x^{\frac{5}{6}}+6x^{\frac{7}{6}}+\right.$$

$$\left.+4x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{11}{6}}\right)dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5}+\frac{36}{13}x^2\sqrt[6]{x}+$$

$$+\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+\frac{6}{17}x^2\sqrt[6]{x^5}+C.$$

b) Если p — целое отрицательное число, то при интегрировании применяется подстановка $x=z^q$, где q — общий знаменатель дробей m и n. Такая подстановка приводит подинтегральное выражение к рациональному виду.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^3}\,dx$.

Решение. В данном случае $p=-3$, $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$, а потому применим подстановку $x=z^2$, так как общий знаменатель дробей m и n равен двум; $dx=2z\,dz$. Получаем:

$$\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+\sqrt{x})^3}=\int\frac{z\cdot 2z\,dz}{(1+z)^3}=2\int\frac{z^2dz}{(1+z)^3}=2\int\frac{z^2-1+1}{(1+z)^3}\,dz=$$

$$=2\int\frac{z^2-1}{(1+z)^3}\,dz+2\int\frac{dz}{(1+z)^3}=2\int\frac{z-1}{(1+z)^2}\,dz+2\int\frac{dz}{(1+z)^3}=$$

$$=2\int\frac{z+1-2}{(1+z)^2}\,dz-\frac{1}{(1+z)^2}=2\int\frac{(z+1)\,dz}{(1+z)^2}-4\int\frac{dz}{(1+z)^2}-\frac{1}{(1+z)^2}=$$

$$=2\ln(1+z)+\frac{4}{1+z}-\frac{1}{(1+z)^2}+C=2\ln(1+\sqrt{x})+$$

$$+\frac{4}{1+\sqrt{x}}-\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}$.

Решение. $p=-2$, $m=-1$, $n=\frac{1}{3}$. Применим подстановку $x=z^3$, $dx=3z^2\,dz$, так как общий знаменатель дробей m и n

равен трём. Получаем:

$$\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2} = \int \frac{3z^2\,dz}{z^3(1+z)^2} = 3\int \frac{dz}{z(1+z)^2} = 3\int \frac{1+z-z}{z(1+z)^2}\,dz =$$

$$= 3\int \frac{(1+z)\,dz}{z(1+z)^2} - 3\int \frac{z\,dz}{z(1+z)^2} = 3\int \frac{dz}{z(1+z)} - 3\int \frac{dz}{(1+z)^2} =$$

$$= 3\int \frac{1+z-z}{z(1+z)}\,dz + \frac{3}{1+z} = 3\int \frac{(1+z)\,dz}{z(1+z)} - 3\int \frac{z\,dz}{z(1+z)} + \frac{3}{1+z} =$$

$$= 3\ln z - 3\ln(1+z) + \frac{3}{1+z} + C = 3\ln\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{1+\sqrt[3]{x}} + C.$$

Вычислить интегралы.

147. $\int \sqrt[3]{x}(2+\sqrt{x})^2\,dx$

$\left(\text{отв.: } 3x\sqrt[3]{x} + \frac{24}{11}x\sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{7}x^2\sqrt[3]{x} + C\right)$

148. $\int \sqrt{x}(1+\sqrt{x})^3\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} + \frac{1}{3}x^3 + C\right)$

2-й случай. Если в дифференциальном биноме числа m и n таковы, что $\frac{m+1}{n}$ — целое число, то интеграл вычисляется при помощи подстановки $a+bx^n=z^s$, где s — знаменатель дроби числа p.

Пример. Вычислить интеграл $\int x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$.

Решение. В данном примере $m=3$, $n=2$, $p=\frac{1}{2}$ и $s=2$. Так как $\frac{m+1}{n}=\frac{3+1}{2}=2$ — целое число, то следует применить подстановку $1+x^2=z^2$, где $s=2$ — знаменатель числа p. Решая последнее равенство относительно x, получаем $x^2=z^2-1$, $x=\sqrt{z^2-1}$ и $dx=\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}dz$.

Выполнив подстановку, получим:

$$\int x^3(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx = \int (\sqrt{z^2-1})^3\cdot(z^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{z}{\sqrt{z^2-1}}\,dz =$$

$$= \int z^2(z^2-1)\,dz = \int (z^4-z^2)\,dz = \frac{1}{5}z^5 - \frac{1}{3}z^3 + C =$$

$$= \frac{1}{5}(1+x^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}(3x^2-2)}{15} + C,$$

так как $z=\sqrt{1+x^2}$.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$.

Решение. Так как $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \int x^{-1}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$, то $m=-1$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$ и $s=2$. В данном случае $\frac{m+1}{n} = \frac{-1+1}{2}=0$, а потому применим подстановку $a^2-x^2=z^2$. Отсюда: $x^2=a^2-z^2$, $x=\sqrt{a^2-z^2}$ и $dx=-\frac{z\,dz}{\sqrt{a^2-z^2}}$. Получаем:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{-z\,dz}{\sqrt{a^2-z^2}\cdot z\sqrt{a^2-z^2}} = \int \frac{dz}{z^2-a^2} =$$
$$= \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{z-a}-\frac{1}{z+a}\right)dz = \frac{1}{2a}[\ln(z-a)-\ln(z+a)]+C=$$
$$= \frac{1}{2a}\ln\frac{z-a}{z+a}+C = \frac{1}{2a}\ln\frac{\sqrt{a^2-x^2}-a}{\sqrt{a^2-x^2}+a}+C.$$

Вычислить интегралы.

149. $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}}$

$$\left(\text{отв.: } -\frac{(3x^2+2)\sqrt{1-x^2}}{8x^4} - \frac{3}{8}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+C\right)$$

150. $\int x^3(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}dx$ $\quad\left(\text{отв.: } (1+2x^2)^{\frac{5}{2}}\cdot\frac{5x^2-1}{70}+C\right)$

3-й случай. Если числа m, n и p, входящие в дифференциальный бином, удовлетворяют условию, что $\left(\frac{m+1}{n}+p\right)$ — число целое, то в этом случае интеграл вычисляется при помощи подстановки $a+bx^n=z^sx^n$, где s — знаменатель числа p.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

Решение. Так как $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$, то $m=-4$,

$$n=2,\ p=-\frac{1}{2} \text{ и } s=2.$$

В данном случае $\frac{m+1}{n}+p = \frac{-4+1}{2}-\frac{1}{2}=-2$ есть целое число, а потому для вычисления интеграла применим подстановку $1+x^2=x^2z^2$, так как знаменатель числа p равен двум.

Решая последнее равенство относительно x, получаем:

$$1=x^2(z^2-1),\quad x=\frac{1}{\sqrt{z^2-1}}\ \text{и}\ dx=-\frac{z\,dz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Подставляем найденные значения в подинтегральное выражение и вычисляем интеграл:

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=-\int\frac{\dfrac{z\,dz}{(z^2-1)^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{1}{(z^2-1)^2}\cdot\dfrac{z}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}}=-\int(z^2-1)\,dz=z-$$

$$-\frac{z^3}{3}+C=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{x^3}+C=\frac{\sqrt{1+x^2}\,(2x^2-1)}{3x^3}+C,$$

так как $z=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

Пример. Вычислить интеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-2x^3}}$.

Решение. Так как $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-2x^3}}=\int(1-2x^3)^{-\frac{1}{3}}dx$, то $m=0$, $n=3$, $p=-\dfrac{1}{3}$ и знаменатель числа p равен $s=3$.

Выражение $\dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{0+1}{3}-\dfrac{1}{3}$ равно нулю, а потому пользуемся подстановкой $1-2x^3=x^3z^3$. Отсюда: $1=x^3(z^3+2)$, $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2+z^3}}$ и $dx=\dfrac{-z^2dz}{(2+z^3)^{\frac{4}{3}}}$.

Подставляя найденные значения в подинтегральное выражение, получаем:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-2x^3}}=-\int\frac{z^2\,dz}{(2+z^3)^{\frac{4}{3}}\dfrac{z}{\sqrt[3]{2+z^3}}}=\int\frac{z\,dz}{2+z^3}=\text{(вычисляем интеграл}$$

$$\text{от рациональной дроби)}=\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}\ln\left(z+\sqrt[3]{2}\right)-$$

$$-\frac{1}{6\sqrt[3]{2}}\ln\left(z^2-z\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)-\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt[3]{2}}\operatorname{acr\,tg}\frac{2z-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{2}}+C,$$

где $z=\dfrac{\sqrt[3]{1-2x^3}}{x}$.

Вычислить интегралы.

151. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{4}\ln\frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} z + C,\right.$ где $\left. z = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}\right)$

152. $\int \frac{a\,dx}{x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\left(\text{отв.: } -a(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\left(2x+\frac{1}{x}\right)+C\right)$

Ниже предлагаются примеры на интегрирование иррациональных функций, при решении каждого из которых студент должен самостоятельно найти более удобный способ вычисления.

153. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$ $\left(\text{отв.: } -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})+C\right)$

154. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-x^2}}$ $\left(\text{отв.: } \arcsin\frac{x}{\sqrt{7}}+C\right)$

155. $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x^2}}$ $(\text{отв.: } 3\ln(1+\sqrt[3]{x})+C)$

156. $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^3}$ $\left(\text{отв.: } \frac{x}{(1+\sqrt{x})^2}+C\right)$

157. $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}x(x+\sqrt{x^2-1}) - \right.$ $\left. -\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})+C\right)$

158. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$ $\left(\text{отв.: } \frac{4}{3}\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}+C\right)$

159. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+x+1}}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(3x+\frac{1}{2}+\right.\right.$ $\left.\left. +\sqrt{9x^2+3x+3}+C\right)\right.$

§ 8. Интегрирование трансцендентных функций

Если под интегралом стоит произведение степени синуса на степень косинуса, причём хотя бы один из показателей степеней есть нечётное положительное число, то вычисление интеграла проводится следующим образом:

$$\int \sin^k x \cos^{2n+1} x dx = \int \sin^k x \cos^{2n} x \cos x dx =$$

$$= \int \sin^k x (1 - \sin^2 x)^n \cos x\, dx = \int \sin^k x \Big[1 - n \sin^2 x +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2!} \sin^4 x - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \sin^6 x + \ldots + (-1)^n \sin^{2n} x\Big] \cos x dx =$$

$$= \int \sin^k x \cos x dx - n \int \sin^{k+2} x \cos x\, dx + \ldots +$$

$$+ (-1)^n \int \sin^{k+2n} x \cos x\, dx = \frac{\sin^{k+1} x}{k+1} - n \frac{\sin^{k+3} x}{k+3} +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2!} \frac{\sin^{k+5} x}{k+5} - \ldots + (-1)^n \frac{\sin^{k+2n+1} x}{k+2n+1} + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \sin^5 x\, dx$.

Решение. $\int \sin^5 x\, dx = \int \sin^4 x \sin x\, dx =$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x\, dx = \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x\, dx =$$

$$= \int \sin x\, dx - 2 \int \cos^2 x \sin x\, dx + \int \cos^4 x \sin x\, dx =$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx$.

Решение. $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x\, dx =$

$$= \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx = \int \sin^2 x \cos x\, dx -$$

$$- \int \sin^4 x \cos x\, dx = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$.

Решение. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x\, dx}{\sin^6 x} =$

$$= \int \sin^{-6} x (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx = \int \sin^{-6} x \cos x\, dx -$$

$$- \int \sin^{-4} x \cos x\, dx = \frac{\sin^{-5} x}{-5} - \frac{\sin^{-3} x}{-3} + C = \frac{1}{3 \sin^3 x} - \frac{1}{5 \sin^5 x} + C.$$

Вычислить интегралы.

160. $\int \frac{\cos^5 x\, dx}{\sin^2 x}$ $\left(\text{отв.: } -\frac{1}{\sin x} - 2 \sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C\right)$

161. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} dx$ $\left(\text{отв.: } 2 \ln \cos x + \frac{1}{2 \cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{2} + C\right)$

162. $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{15} \cos^3 x (3 \cos^2 x - 5) + C\right)$

163. $\int \sin^9 x\, dx$ $\left(\text{отв.: } -\cos x + \frac{4}{3} \cos^3 x - \frac{6}{5} \cos^5 x + \frac{4}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + C\right)$

164. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\sqrt[5]{\cos x}}$ $\left(\text{отв.: } \frac{5}{14}\sqrt[5]{\cos^{14} x} - \frac{5}{4}\sqrt[5]{\cos^4 x} + C\right)$

165. $\int \sin^7 x \cdot \cos^9 x\,dx$

$\left(\text{отв.: } \frac{1}{8}\sin^8 x - \frac{2}{5}\sin^{10} x + \frac{1}{2}\sin^{12} x - \frac{2}{7}\sin^{14} x + \frac{1}{16}\sin^{16} x + C\right)$

166. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{3\sin^3 x} + C\right)$

167. $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$ $\left(\text{отв.: } 3\sqrt[3]{\sin x} - \frac{3}{7}\sqrt[3]{\sin^7 x} + C\right)$

Если под знаком интеграла стоит произведение чётных степеней синуса и косинуса, то, пользуясь формулами:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

понижают степени синуса и косинуса и затем интегрируют.

Пример. Вычислить интеграл $\int \cos^4 x\,dx$.

Решение. $\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx =$
$= \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx +$
$+ \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1 + \cos 4x}{2}\,dx =$
$= \frac{1}{4}(x + \sin 2x) + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x +$
$+ \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

Пример. Вычислить интеграл $\int \sin^4 x \cos^6 x\,dx$.

Решение. $\int \sin^4 x \cos^6 x\,dx = \frac{1}{16}\int (2\sin x \cos x)^4 \cos^2 x\,dx =$
$= \frac{1}{16}\int \sin^4 2x \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{32}\left[\int \sin^4 2x\,dx + \int \sin^4 2x \cos 2x\,dx\right] =$
$= \frac{1}{32}\int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right)^2 dx + \frac{1}{320}\sin^5 2x = \frac{1}{64}\int (1 - 2\cos 4x + \cos^2 4x)\,dx +$
$+ \frac{1}{320}\sin^5 2x = \frac{1}{64}x - \frac{1}{128}\sin 4x + \frac{1}{128}\int (1 + \cos 8x)\,dx +$
$+ \frac{1}{320}\sin^5 2x = \frac{1}{64}x - \frac{1}{128}\sin 4x + \frac{1}{128}x + \frac{1}{1024}\sin 8x + \frac{1}{320}\sin^5 2x =$
$= \frac{3}{128}x - \frac{1}{128}\sin 4x + \frac{1}{1024}\sin 8x + \frac{1}{320}\sin^5 2x.$

Вычислить интегралы.

168. $\int \cos^4 x\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C\right)$

169. $\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C\right)$

170. $\int \sin^6 x\,dx$ $\qquad\left(\text{отв.: } \frac{5x}{16} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C\right)$

171. $\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx$ $\qquad\left(\text{отв.: } \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C\right)$

172. $\int \sin^4 x \cos^4 x\,dx$ $\qquad\left(\text{отв.: } \frac{1}{128}\left(3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x\right) + C\right)$

Если подинтегральную функцию можно представить в виде произведения чётных степеней синуса и косинуса, причём хотя бы один из показателей отрицательный, то после преобразований можно получить под интегралом функцию, выраженную через тангенсы (или котангенсы), и потом интегрировать.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$.

Решение. Оба показателя чётные, причём один из них отрицательный. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx = \int \mathrm{tg}^4 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x + C.$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x}\,dx$.

Решение. $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x}\,dx = \int \mathrm{tg}^6 x\,dx = \int \mathrm{tg}^4 x \cdot \mathrm{tg}^2 x\,dx =$

$= \int \mathrm{tg}^4 x(\sec^2 x - 1)\,dx = \int \mathrm{tg}^4 x \sec^2 x\,dx - \int \mathrm{tg}^4 x\,dx =$

$= \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x - \int \mathrm{tg}^2 x(\sec^2 x - 1)\,dx = \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x - \int \mathrm{tg}^2 x \sec^2 x\,dx +$

$+ \int \mathrm{tg}^2 x\,dx = \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x - \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + \int(\sec^2 x - 1)\,dx = \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x -$

$- \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}\,x - x + C.$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \sec^4 x\,dx = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x\,dx =$

$= \int (1 + \mathrm{tg}^2 x)\sec^2 x\,dx = \int \sec^2 x\,dx + \int \mathrm{tg}^2 x \cdot \sec^2 x\,dx =$

$= \mathrm{tg}\,x + \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 x + C.$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^6 x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sin^6 x} = \int \mathrm{cosec}^6 x\,dx = \int \mathrm{cosec}^4 x \cdot \mathrm{cosec}^2 x\,dx =$

$= \int (1 + \mathrm{ctg}^2 x)^2 \mathrm{cosec}^2 x\,dx = \int \mathrm{cosec}^2 x\,dx + 2\int \mathrm{ctg}^2 x \cdot \mathrm{cosec}^2 x\,dx +$

$+ \int \mathrm{ctg}^4 x\,\mathrm{cosec}^2 x\,dx = -\mathrm{ctg}\,x - \frac{2}{3}\mathrm{ctg}^3 x - \frac{1}{5}\mathrm{ctg}^5 x + C.$

Пример. Вычислить интеграл $\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\,dx$.

Решение. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2}{\sin^2 x} dx =$
$= \int \frac{1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 2 + \sin^2 x \right) dx = -\operatorname{ctg} x -$
$- 2x + \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = -\operatorname{ctg} x - 2x + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

Вычислить интегралы.

173. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ $\left(\text{отв.: } -\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C \right)$

174. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ $\left(\text{отв.: } \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + C \right)$

175. $\int \operatorname{ctg}^6 x\, dx$ $\left(\text{отв.: } -\frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x - x + C \right)$

176. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^8 x}$ $\left(\text{отв.:} -\frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x + \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + x + C \right)$

177. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$ $\left(\text{отв.: } \operatorname{tg} x + \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{3}{2} x + C \right)$

Если подинтегральную функцию можно представить в виде произведения отрицательных степеней синуса и косинуса: $\sin^{-n} x$, $\cos^{-m} x$ $(n > 0,\ m > 0)$, сумма показателей которых есть число чётное: $-m - n = -2k$, то нужно числитель и знаменатель дроби разделить на $\cos^{2k} x$ (или $\sin^{2k} x$), выразить результат через тангенсы (или котангенсы) и затем вычислять интеграл.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{11} x \cdot \cos x}}$.

Решение. Подинтегральную функцию можно представить в виде произведения $\sin^{-\frac{11}{3}} x \cos^{-\frac{1}{3}} x$. Сумма показателей $-\frac{11}{3} - \frac{1}{3} = -4$ — чётное число, а потому нужно числитель и знаменатель разделить на $\cos^4 x$.
Итак,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^{11} x \cos x}} = \int \frac{\frac{1}{\cos^4 x} dx}{\sqrt[3]{\frac{\sin^{11} x \cos x}{\cos^{12} x}}} = \int \frac{\sec^4 x\, dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^{11} x}} =$$

$$= \int \operatorname{tg}^{-\frac{11}{3}} x \cdot \sec^2 x \cdot \sec^2 x\, dx = \int \operatorname{tg}^{-\frac{11}{3}} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x\, dx =$$

$$= \int (\operatorname{tg}^{-\frac{11}{3}} x + \operatorname{tg}^{-\frac{5}{3}} x) \sec^2 x\, dx = -\frac{3}{8} \operatorname{tg}^{-\frac{8}{3}} x - \frac{3}{2} \operatorname{tg}^{-\frac{2}{3}} x + C =$$

$$= -\frac{3}{8} \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos x}$.

Решение. Так как в произведении $\sin^{-3} x \cos^{-1} x$ сумма показателей $-3-1=-4$ есть число чётное, то разделим числитель и знаменатель на $\cos^4 x$ и результат выразим через тангенсы:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^4 x}}{\frac{\sin^3 x \cdot \cos x}{\cos^4 x}} = \int \frac{\sec^4 x\, dx}{\operatorname{tg}^3 x} = \int \operatorname{tg}^{-3} x \cdot \sec^2 x \cdot \sec^2 x\, dx =$$

$$= \int \operatorname{tg}^{-3} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \sec^2 x\, dx = \int (\operatorname{tg}^{-3} x + \operatorname{tg}^{-1} x) \sec^2 x\, dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^{-2} x}{-2} + \ln \operatorname{tg} x + C = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln \operatorname{tg} x + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}$.

Решение. В данном случае удобнее перейти к удвоенным углам:

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x} = 16 \int \frac{dx}{16 \sin^4 x \cos^4 x} = 16 \int \frac{dx}{(2 \sin x \cos x)^4} = 16 \int \frac{dx}{\sin^4 2x} =$$

$$= 16 \int \operatorname{cosec}^4 2x\, dx = 16 \int \operatorname{cosec}^2 2x (1 + \operatorname{ctg}^2 2x)\, dx =$$

$$= -8 \operatorname{ctg} 2x - \frac{8}{3} \operatorname{ctg}^3 2x + C.$$

Вычислить интегралы.

178. $\int \frac{dx}{\sin^8 x \cdot \cos^4 x}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + 5 \operatorname{tg} x - 10 \operatorname{ctg} x - \frac{10}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg}^5 x - \frac{1}{7} \operatorname{ctg}^7 x + C\right)$

179. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cdot \cos^3 x}}$ $(\text{отв.: } 2\sqrt{\operatorname{tg} x} + C)$

180. $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{\sin x \cdot \cos^9 x}}$ $\left(\text{отв.: } \frac{5}{4} \sqrt[5]{\operatorname{tg}^4 x} + C\right)$

181. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}$ $\left(\text{отв.: } -\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + 3 \ln \operatorname{tg} x + \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C\right)$

Если подинтегральная функция имеет вид $\frac{\sin^{2m} x}{\cos^{2n+1} x}$ (I) или $\frac{\cos^{2n} x}{\sin^{2m+1} x}$ (II), т. е. в числителе стоит степень с чётным положительным показателем, а в знаменателе степень с нечётным положительным показателем, то нужно числитель и знаменатель дроби умножить на $\cos x$ в случае (I) или на $\sin x$ в случае (II), выразить дробь через синусы или косинусы, сделать подстановку и потом интегрировать.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^4 x\, dx}{\cos^3 x}$.

Решение. В числителе чётная степень, а в знаменателе — нечётная. Умножаем числитель и знаменатель на $\cos x$:

$$\int \frac{\sin^4 x\, dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^4 x \cdot \cos x\, dx}{\cos^4 x} = \int \frac{\sin^4 x \cdot \cos x\, dx}{(1-\sin^2 x)^2} =$$

(полагаем: $z = \sin x$, $dz = \cos x\, dx$ и сделаем подстановку) $= \int \frac{z^4\, dz}{(1-z^2)^2}$ (интегрируем по частям, полагая $u = z^3$, $dv = \frac{z\, dz}{(1-z^2)^2}$, отсюда:

$$du = 3z^2\, dz,\ v = \frac{1}{2(1-z^2)}\Big) = \frac{z^3}{2(1-z^2)} - \frac{3}{2}\int \frac{z^2\, dz}{1-z^2} = \frac{z^3}{2(1-z^2)} -$$
$$-\frac{3}{2}\int \frac{z^2-1+1}{1-z^2}\, dz = \frac{z^3}{2(1-z^2)} + \frac{3}{2}\int dz - \frac{3}{2}\int \frac{dz}{1-z^2} = \frac{z^3}{2(1-z^2)} + \frac{3}{2}z -$$
$$-\frac{3}{4}\ln\frac{1+z}{1-z} + C = \frac{\sin^3 x}{2\cos^2 x} + \frac{3}{2}\sin x - \frac{3}{4}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\, dx$.

Решение. Умножаем числитель и знаменатель на $\cos x$ и получаем:

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}\, dx = \int \frac{\sin^4 x \cos x}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{\sin^4 x \cdot \cos x\, dx}{1-\sin^2 x} = \text{(полагаем } z = \sin x,$$
$$dz = \cos x\, dx \text{ и делаем подстановку)} =$$
$$= \int \frac{z^4\, dz}{1-z^2} = \int \frac{z^4-1+1}{1-z^2}\, dz = \int \frac{z^4-1}{1-z^2}\, dz + \int \frac{dz}{1-z^2} = -\int (1+z^2)\, dz +$$
$$+\int \frac{dz}{1-z^2} = -z - \frac{z^3}{3} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z} + C = -\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} +$$
$$+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C.$$

Вычислить интегралы.

182. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x}\, dx$ $\left(\text{отв.: } \cos x + \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C\right)$

183. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$ $\left(\text{отв.: } \frac{3}{8}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{4}\frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{3}{8}\ln \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C\right)$

184. $\int \frac{\cos^4 x\, dx}{\sin^3 x}$ $\left(\text{отв.: } -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \cos x - \frac{3}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C\right)$

185. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}$ $\left(\text{отв.: } -\frac{\cos x}{4}\left(\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{3}{2\sin^2 x}\right) + \frac{3}{8}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C\right)$

186. $\int \frac{dx}{\sin x}$ $\left(\text{отв.: } \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C\right)$

187. $\int \frac{d}{\cos x}$ $\left(\text{отв.: } \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} + C\right)\right.$

Если под интегралом дана функция $R(\sin x, \cos x)$, рациональная относительно синуса и косинуса x, то эта функция может быть преобразована в выражение рациональное относительно z подстановкой $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$. При этом:

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}\ \text{(I)},\quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}\ \text{(II)},\quad dx = \frac{2dz}{1+z^2}\ \text{(III)}.$$

Эта подстановка приводит к громоздким выкладкам, и ею следует пользоваться только в тех случаях, когда вычисление интеграла не может быть сведено к ранее рассмотренным примерам.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$.

Решение. Так как под интегралом стоит функция рациональная относительно $\sin x$ и $\cos x$, то мы можем применить указанную выше подстановку:

$$\int \frac{(1+\sin x)\,dx}{\sin x(1+\cos x)} = \int \frac{\left(1+\frac{2z}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}\left(1+\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = \int \frac{1+z^2+2z}{z(1+z^2+1-z^2)}dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{z}+z+2\right)dz = \frac{1}{2}\left(\ln z+\frac{1}{2}z^2+2z\right)+C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+C,$$

так как $z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$.

Решение. Под интегралом стоит рациональная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$. Применяя подстановку, получим:

$$\int \frac{dx}{\sin x+\cos x} = \int \frac{\frac{2z}{1+z^2}\,dz}{\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2z\,dz}{2z+1-z^2} = -\int \frac{2z-2+2}{z^2-2z-1}dz =$$

$$= -\int \frac{(2z-2)\,dz}{z^2-2z-1} - 2\int \frac{dz}{z^2-2z+1-2} = -\ln(z^2-2z-1) -$$

$$-2\int \frac{dz}{(z-1)^2-2} = -\ln(z^2-2z-1)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+z-1}{\sqrt{2}-z+1}+C =$$

$$= -\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}-1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}+1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\operatorname{tg} x}$.

Решение. $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\operatorname{tg} x} = \int \frac{\sin x\,dx}{1+\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{\sin x\cdot\cos x\,dx}{\sin x+\cos x} =$

$$= \int \frac{\frac{2z}{1+z^2}\,\frac{1-z^2}{1+z^2}\,\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}} = 4\int \frac{(1-z^2)\,dz}{(1+z^2)^2(2z+1-z^2)}.$$

Далее нужно интегрировать как рациональную дробь. Проделайте это самостоятельно.

Вычислить интегралы.

188. $\int \frac{dx}{\sin x\,(2+\cos x-2\sin x)}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{3}\ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}-\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right)+\right.$ $\left.+\frac{5}{3}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right)+C\right)$

189. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{4}\ln\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C\right)$

190. $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^3}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}+\frac{1}{20}\operatorname{tg}^5\frac{x}{2}+C\right)$

191. $\int \frac{dx}{(1+\cos x)^2}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{6}\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}+C\right)$

При вычислении интегралов $\int \sin ax \sin bx\, dx$, $\int \sin ax \cos bx\, dx$, $\int \cos ax \cos bx\, dx$ необходимо преобразовать произведение тригонометрических функций в сумму или разность, пользуясь одной из следующих формул:

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x-\cos(a+b)x] \qquad \text{(I)}$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x+\cos(a-b)x] \qquad \text{(II)}$$

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x+\sin(a-b)x]. \qquad \text{(III)}$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \sin x\cdot\cos 4x\, dx$.

Решение. Пользуясь формулой (III), получим:

$$\sin x\cdot\cos 4x = \frac{1}{2}(\sin 5x-\sin 3x).$$

Отсюда:

$$\int \sin x\cos 4x\, dx = \frac{1}{2}\int(\sin 5x-\sin 3x)\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}\cos 3x\right)+C = \frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{10}\cos 5x+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \cos 4x\cdot\cos 5x\, dx$.

Решение. Пользуясь формулой (II), получим:

$$\cos 4x\cos 5x = \frac{1}{2}(\cos 9x+\cos x).$$

Отсюда:

$$\int \cos 4x\cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int(\cos 9x+\cos x)\,dx = \frac{1}{18}\sin 9x+\frac{1}{2}\sin x+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \cos^2 x \sin 3x\, dx$.

Решение. Представим подинтегральную функцию в виде произведения трёх множителей: $\int \cos^2 x \sin 3x\, dx =$
$= \int \cos x (\cos x \sin 3x)\, dx = \Big[$пользуясь формулой (III), заменим произведение суммой: $\cos x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x)\Big] =$
$= \frac{1}{2}\int \cos x (\sin 4x + \sin 2x) dx = \frac{1}{2}\int \cos x \cdot \sin 4x dx +$
$+ \frac{1}{2}\int \cos x \cdot \sin 2x\, dx$ (под каждым интегралом произведение тригонометрических функций заменяем суммой) $= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(\sin 5x +$
$+ \sin 3x)\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(\sin 3x + \sin x)\, dx = \frac{1}{4}\Big(-\frac{\cos 5x}{5} - \frac{2\cos 3x}{3} -$
$- \cos x\Big) + C.$

192. $\int \cos 2x \sin 4x dx$ $\quad\left(\text{отв.: } -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\sin 2x + C\right)$

193. $\int \sin 2x \sin 5x\, dx$ $\quad\left(\text{отв.: } \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{14}\sin 7x + C\right)$

194. $\int \cos x \cos 3x\, dx$ $\quad\left(\text{отв.: } \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\right)$

195. $\int \sin^2 x \cdot \sin 3x\, dx$ $\left(\text{отв.: } -\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{20}\cos 5x + \frac{1}{4}\cos x + C\right)$

Если под ннтегралом стоит произведение многочлена $P(x)$ на $\sin x$ (или $\cos x$), то интегралы такого типа могут быть вычислены многократным применением формулы интегрирования по частям.

Пример. Вычислить интеграл $\int (x^2 + x + 1) \sin x\, dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям, полагая $u = x^2 + x + 1$, $dv = \sin x\, dx$, отсюда: $du = (2x + 1)\, dx$ и $v = -\cos x$. Получим:

$$\int (x^2 + x + 1) \sin x\, dx = -\cos x (x^2 + x + 1) + \int (2x + 1) \cos x\, dx.$$

Последний интеграл вычисляем по частям:

$$\int (2x + 1) \cos x\, dx = (2x + 1) \sin x - 2\int \sin x\, dx =$$
$$= (2x + 1) \sin x + 2\cos x. \text{ Итак, } \int (x^2 + x + 1) \sin x\, dx =$$
$$= (2x + 1) \sin x + (1 - x - x^2) \cos x + C.$$

Вычислить интегралы.

196. $\int(x^2+3x+5)\cos 2x\,dx$ $\left(\text{отв.: } \cos 2x\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)+\right.$

$\left.+\sin 2x\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}\right)+C\right)$

197. $\int(x+1)\cos x\,dx$ (отв.: $(x+1)\sin x+\cos x+C$)

В некоторых случаях интеграл тригонометрической функции может быть вычислен в результате применения подходящих преобразований тригонометрических функций.

Пример. Вычислить интеграл $\int\sqrt{1+\sin x}\,dx$.

Решение. Под корнем произведём замену, пользуясь равенствами:

$$1=\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2} \quad \text{и} \quad \sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}.$$

Получим:

$$\int\sqrt{1+\sin x}\,dx=\int\sqrt{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\,dx=$$

$$=\int\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}dx=\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)dx=2\sin\frac{x}{2}-$$

$$-2\cos\frac{x}{2}+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{\sin^2 x\cos^2 x\,dx}{(\sin^3 x+\cos^3 x)^2}$.

Решение. Вынося в знаменателе $\cos^3 x$ за скобку, получим:

$$\int\frac{\sin^2 x\cdot\cos^2 x\,dx}{(\sin^3 x+\cos^3 x)^2}=\int\frac{\sin^2 x\cdot\cos^2 x\,dx}{\cos^6 x\,(\operatorname{tg}^3 x+1)^2}=\int\frac{\operatorname{tg}^2 x\cdot\sec^2 x\,dx}{(\operatorname{tg}^3 x+1)^2}=$$

$$=\int(\operatorname{tg}^3 x+1)^{-2}\cdot\operatorname{tg}^2 x\cdot\sec^2 x\,dx=\frac{-1}{3}(\operatorname{tg}^3 x+1)^{-1}+C=$$

$$=-\frac{1}{3(\operatorname{tg}^3 x+1)}+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{\cos x+\sin x}{\sqrt{\sin 2x}}dx$.

Решение. Сумму в числителе преобразуем в произведение:

$$\cos x+\sin x=\cos x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

В знаменателе перейдём к косинусу дополнительного угла:

$$\int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{\sin 2x}} dx = \int \frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}} dx =$$

$=\Big[$в знаменателе сделаем преобразование, пользуясь формулой $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$; откуда: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и, следовательно,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\Big] =$$

$$= \int \frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx}{\sqrt{1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}} = \arccos\left[\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x} dx$.

Решение. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx - \int \frac{\sin^2 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{ctg}^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x dx - \int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + C.$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x - \sin^4 x} dx$.

Решение. $\int \frac{\cos 2x\, dx}{\cos^4 x - \sin^4 x} = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^4 x - \sin^4 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int dx = x + C.$

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{\sin 2x}{\cos^7 x} dx$.

Решение. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^7 x} dx = 2\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cos^7 x} dx = 2\int \frac{\sin x}{\cos^6 x} dx = 2\int \cos^{-6} x \sin x\, dx = \frac{2\cos^{-5} x}{5} + C = \frac{2}{5\cos^5 x} + C.$

При решении следующих примеров студент должен самостоятельно выбрать наиболее удачный способ вычисления.

198. $\int \sqrt{\frac{\sin^3 x}{\cos^{11} x}} dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{2}{5}\sqrt{\operatorname{tg}^5 x} + \frac{2}{9}\operatorname{tg}^9 x + C\right)$

199. $\int \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} dx$ (отв.: $\ln(\sin x + \cos x) + C$)

200. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{\sin^5 x}$ $\left(\text{отв.: } -\frac{2}{3\sin^3 x} + C\right)$

201. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}\operatorname{tg} x + \frac{1}{2}\ln\operatorname{tg} x + C\right)$

202. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{2}{\cos x} + C\right)$

203. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x \cos^5 x}}$ $\left(\text{отв.: } 4\sqrt[4]{\operatorname{tg} x} + C\right)$

Если под знаком интеграла стоит рациональная функция от показательной функции a^x, то подстановкой $y = a^x$ вычисление сводится к интегрированию рациональной алгебраической дроби.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{1+e^x}{(1-e^{2x})e^x} dx$.

Решение. Применим подстановку $y = e^x$; отсюда $x = \ln y$ и $dx = \frac{dy}{y}$.

Получаем:

$$\int \frac{1+e^x}{e^x(1-e^{2x})} dx = \int \frac{(1+y)\,dy}{y(1-y^2)\,y} = \int \frac{dy}{y^2(1-y)} = \int \frac{1-y^2+y^2}{y^2(1-y)} dy =$$
$$= \int \frac{(1-y^2)\,dy}{y^2(1-y)} + \int \frac{y^2 dy}{y^2(1-y)} = \int \frac{1+y}{y^2} dy + \int \frac{dy}{1-y} = \int \frac{dy}{y^2} + \int \frac{dy}{y} +$$
$$+ \int \frac{dy}{1-y} = -\frac{1}{y} + \ln y - \ln(1-y) + C = -\frac{1}{e^x} + \ln\frac{e^x}{1-e^x} + C.$$

Вычислить интегралы.

204. $\int \frac{dx}{e^x+1}$ $\left(\text{отв.: } x - \ln(e^x+1) + C\right)$

205. $\int \frac{e^x dx}{(1+e^{2x})^2}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} e^x + \frac{1}{2}\frac{e^x}{1+e^{2x}} + C\right)$

Рассмотрим примеры на интегрирование трансцендентных функций, решение которых не может быть сведено к рассмотренным ранее случаям.

Пример. Вычислить интеграл $\int \sin\ln x\,dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям, полагая

$$u = \sin\ln x, \quad dv = dx$$

и, следовательно,

$$du = \cos\ln x \cdot \frac{dx}{x}, \quad v = x.$$

Получим:

$$\int \sin\ln x\,dx = x\sin\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\cos\ln x\,dx = x\sin\ln x -$$
$$- \int \cos\ln x\,dx. \qquad (I)$$

Последний интеграл вычислим по частям, полагая

$$u = \cos\ln x, \quad dv = dx$$

и, следовательно,

$$du = -\sin \ln x \cdot \frac{1}{x}\, dx, \quad v = x.$$

Итак,

$$\int \cos \ln x\, dx = x \cos \ln x + \int \sin \ln x \cdot x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cos \ln x + \\ + \int \sin \ln x\, dx.$$

Подставляем полученный результат в равенство (I):

$$\int \sin \ln x\, dx = x \sin \ln x - x \cos \ln x - \int \sin \ln x\, dx. \qquad \text{(II)}$$

Решая уравнение (II) относительно $\int \sin \ln x\, dx$, получим:

$$\int \sin (\ln x)\, dx = \frac{1}{2} x (\sin \ln x - \cos \ln x) + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x\, dx$.

Решение. Интегрируем по частям, полагая

$$u = \ln \operatorname{tg} x, \quad dv = \sin x\, dx$$

и, следовательно,

$$du = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x dx = \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x}, \quad v = -\cos x.$$

Получаем:

$$\int \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x\, dx = -\cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x + \int \frac{dx}{\sin x} = -\cos x \ln \operatorname{tg} x + \\ + \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = -\cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x + \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} dx = -\cos x \ln \operatorname{tg} x + \\ + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \operatorname{arc\,tg} x \frac{x^4 dx}{x^2+1}$.

Решение. Интегрируем по частям, полагая

$$u = \operatorname{arc\,tg} x, \quad dv = \frac{x^4 dx}{x^2+1}$$

и, следовательно,

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, \; v = \int \frac{x^4\, dx}{1+x^2} = \int \frac{x^4 - 1 + 1}{1+x^2} dx = \int (x^2 - 1)\, dx + \\ + \int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{3} x^3 - x + \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Получаем:

$$\int \operatorname{arc\,tg} x \cdot \frac{x^4\,dx}{x^2+1} = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\operatorname{arc\,tg} x + (\operatorname{arc\,tg} x)^2 -$$

$$-\int\left(\frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arc\,tg} x\right)\frac{dx}{1+x^2} = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\operatorname{arc\,tg} x + (\operatorname{arc\,tg} x)^2 -$$

$$-\frac{1}{3}\int\frac{x^3dx}{1+x^2} + \int\frac{xdx}{1+x^2} - \int\frac{\operatorname{arc\,tg} x\,dx}{1+x^2} = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\operatorname{arc\,tg} x +$$

$$+(\operatorname{arc\,tg} x)^2 - \frac{1}{3}\int\frac{x^3+x-x}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2 =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2 - \frac{1}{3}\int\frac{x(1+x^2)}{1+x^2}dx +$$

$$+\frac{1}{3}\int\frac{x}{1+x^2}dx + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2 -$$

$$-\frac{x^2}{6} + \frac{2}{3}\ln(1+x^2) + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int x^2 \cos x e^x dx$.

Решение. Интегрируем по частям, полагая:

$$u = x^2,\ dv = \cos x e^x dx,$$

следовательно,

$$du = 2xdx,\ \ v = \int \cos x e^x dx = e^x \cos x + \int \sin x e^x dx =$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int \cos x e^x\,dx.$$

Отсюда:

$$v = \int \cos x e^x dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x).$$

Получаем:

$$\int x^2 \cos x e^x\,dx = \frac{1}{2}x^2 ex(\sin x + \cos x) - \int x e^x(\cos x + \sin x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^x(\sin x + \cos x) - \int x e^x \cos x\,dx - \int x e^x \sin x\,dx.$$

Последние два интеграла вычислите самостоятельно, пользуясь формулой интегрирования по частям $\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}\ [(x^2-1)\sin x - \right.$ $\left. -(x-1)^2\cos x] + C\right)$.

Пример. Вычислить интеграл $\int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})\,dx$.

Решение. Интегрируем по частям, полагая

$$u = \ln\ (\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}),\ dv = dx;$$

отсюда:

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}\left(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx,\ v = x.$$

Получим:

$$\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\,dx = x\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) -$$

$$-\frac{1}{2}\int x\cdot\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\cdot\ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) -$$

$$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arcsin x + C.$$

Вычислить интегралы.

206. $\int\frac{x\operatorname{arc\,tg} x}{(1+x^2)^2}\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{x}{4(1+x^2)}+\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}+C\right)$

207. $\int\frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ $\left(\text{отв.: } -x-\frac{\ln\cos x}{\operatorname{tg} x}+C\right)$

208. $\int\cos\ln x\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{x}{2}(\sin\ln x+\cos\ln x)+C\right)$

Тригонометрические подстановки

Если под знаком интеграла стоит иррациональная функция, содержащая только радикалы вида $\sqrt{a^2-x^2}$ или $\sqrt{x^2\pm a^2}$, то для приведения функции к рациональному виду целесообразно пользоваться тригонометрическими подстановками.

В случае иррациональностей вида $\sqrt{a^2-x^2}$ пользуются одной из подстановок: $x=a\sin t$ или $x=a\cos t$, где $-\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$ или $0\leqslant t\leqslant\pi$. Любая из этих подстановок приводит функцию к рациональному виду относительно $\sin t$ и $\cos t$.

В случае иррациональности вида $\sqrt{x^2+a^2}$ следует пользоваться подстановкой $x=a\operatorname{tg} t$. Если под интегралом имеются только радикалы вида $\sqrt{x^2-a^2}$, то пользуются подстановкой $x=a\sec^2 t$.

Рассмотрим несколько интегралов, при вычислении которых удобно пользоваться тригонометрическими подстановками.

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. Для вычисления этого интеграла удобно применить подстановку:

$$x=2\sin t,\ (1)\quad dx=2\cos t\,dt,$$

так как эта подстановка приводит подинтегральную функцию к рациональному виду относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Получаем:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{4\sin^2 t\,2\cos t\,dt}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} = \int \frac{8\sin^2 t\cos t\,dt}{2\sqrt{1-\sin^2 t}} = 4\int \frac{\sin^2 t\cos t\,dt}{\cos t} =$$

$$= 4\int \sin^2 t\,dt = 4\int \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = 2\int (1-\cos 2t)\,dt = 2t - \sin 2t +$$

$$+ C = 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C,$$

так как из равенства (1) имеем:

$$t = \arcsin\frac{x}{2} \quad \text{и} \quad \sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} =$$

$$= 2\cdot\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \sqrt{2x-x^2}\,dx$.

Решение. Хотя под интегралом стоит радикал более сложного вида, но и в этом случае удобно пользоваться тригонометрической подстановкой, приводящей функцию к рациональному виду.

Полагаем

$$x = 2\sin^2 t \qquad (1),$$

отсюда

$$dx = 4\sin t\cos t\,dt.$$

Получаем:

$$\int \sqrt{2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{2\cdot 2\sin^2 t - 4\sin^4 t}\cdot 4\sin t\cos t\,dt =$$

$$= 2\int 2\sqrt{\sin^2 t\,(1-\sin^2 t)}\cdot\sin 2t\,dt = 2\int 2\sin t\cos t\cdot\sin 2t\,dt =$$

$$= 2\int \sin^2 2t\,dt = \int (1-\cos 4t)\,dt = t - \frac{1}{4}\sin 4t + C. \qquad (2)$$

В полученном результате нужно t выразить через x. Пользуясь равенством (1), получим:

$$t = \arcsin\sqrt{\frac{x}{2}},\ \sin 4t = 2\sin 2t\cos 2t = 4\sin t\cos t\,(\cos^2 t - \sin^2 t) =$$

$$= 4\sqrt{\frac{x}{2}}\sqrt{1-\frac{x}{2}}\left(1-\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right) = 2\sqrt{2x-x^2}\,(1-x).$$

Подставляя найденные значения в равенство (2), получим:

$$\int \sqrt{2x-x^2}\,dx = \arcsin\sqrt{\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}(1-x)\sqrt{2x-x^2} + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx$.

Решение. В данном случае можно пользоваться подстановкой $x = \operatorname{tg} t$, отсюда $dx = \sec^2 t\,dt$. Этой подстановкой подинтегральная функция приводится к рациональному виду. Получаем:

$$\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx=\int \operatorname{tg}^3 t\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}\sec^2 t\,dt=\int \operatorname{tg}^3 t\sec^3 t\,dt=$$

$$=\int\frac{\sin^3 t}{\cos^6 t}dt=\int\frac{(1-\cos^2 t)\sin t}{\cos^6 t}dt=\int\cos^{-6}t\sin t\,dt-\int\cos^{-4}t\sin t\,dt=$$

$$=\frac{1}{5}\frac{1}{\cos^5 t}-\frac{1}{3\cos^3 t}+C. \qquad (2)$$

Из равенства (2) получаем:

$$\cos t=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

а следовательно,

$$\int x^3\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{5}\sqrt{(1+x^2)^5}-\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Решение. Для того чтобы под интегралом получить функцию, рациональную относительно $\sin t$ и $\cos t$, воспользуемся подстановкой

$$x=\sec t \qquad (1)$$

и, следовательно,

$$dx=\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

Получим:

$$\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx=\int\sec^2 t\sqrt{\sec^2 t-1}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt=\int\frac{\sin^2 t}{\cos^5 t}dt=$$

$=\Big($интегрируем по частям, полагая $u=\sin t$, $dv=\frac{\sin t}{\cos^5 t}dt$ и, следовательно, $du=\cos t\,dt$, $v=\frac{1}{4\cos^4 t}\Big)=\frac{\sin t}{4\cos^4 t}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\cos^3 t}=$

$$=\frac{\sin t}{4\cos^4 t}-\frac{1}{4}\int\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\cos^3 t}dt=\frac{\sin t}{4\cos^4 t}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\cos t}-\frac{1}{4}\int\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt=$$

$=$(последний интеграл вычисляем по частям)$=\frac{\sin t}{4\cos^4 t}-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{\cos t}-$

$$-\frac{\sin t}{8\cos^2 t}+\frac{1}{8}\int\frac{dt}{\cos t}=\frac{\sin t}{4\cos^4 t}-\frac{\sin t}{8\cos^2 t}-\frac{1}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C. \qquad (2)$$

Из равенства (1) получаем:

$$\cos t=\frac{1}{x},\quad \sin t=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\quad\text{и}\quad \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}-\sin\frac{t}{2}}=$$

$$=\frac{\left(\sin\frac{t}{2}+\cos\frac{t}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}}=\frac{1+\sin t}{\cos t}=x+\sqrt{x^2-1}.$$

Итак,

$$\int x^2\sqrt{x^2-1}\,dx=\frac{1}{4}x^3\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{8}x\sqrt{x^2-1}-$$
$$-\frac{1}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}$.

Решение. Применяем подстановку $x=\sin^2 t$, $dx=$ $=2\sin t\cos t\,dt$ и получаем:

$$\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x-x^2}}=\int\frac{2\sin t\cos t\,dt}{(1+\sin t)\sqrt{\sin^2 t-\sin^4 t}}=\int\frac{2\,dt}{1+\sin t}=$$
$$=2\int\frac{1-\sin t}{\cos^2 t}dt=\int\frac{2}{\cos^2 t}dt-2\int\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt=2\operatorname{tg} t-\frac{2}{\cos t}+C=$$
$$=\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}-\frac{2}{\sqrt{1-x}}+C=\frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{1-x}}+C.$$

Вычислить интегралы.

209. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left(\text{отв.: }\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C\right)$

210. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ $\left(\text{отв.: }\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C\right)$

211. $\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ $\left(\text{отв.: }\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C\right)$

212. $\int\frac{dx}{x\sqrt{(4x-x^2)^3}}$ $\left(\text{отв.: }\frac{1}{12}\cdot\frac{x^2-2x-2}{x\sqrt{4x-x^2}}+C\right)$

212(а). $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax-x^2}}$ $\left(\text{отв.: }-\frac{2x+3a}{4}\sqrt{ax-x^2}+\right.$ $\left.+\frac{3a^2}{8}\arcsin\frac{2x-a}{a}+C\right)$

213. $\int\frac{x^4\,dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\left(\text{отв.: }-\frac{x(x^2-3)}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{2}\arcsin x+C\right)$

Метод неопределённых коэффициентов при интегрировании трансцендентных функций

В некоторых случаях можно заранее предвидеть, какой вид должна иметь первообразная функция для данной подинтегральной. Так, например, легко показать, что для функции

$$P_n(x)\,e^{kx} \tag{I}$$

первообразная должна иметь вид произведения:

$$Q_n(x)\,e^{kx}, \tag{I'}$$

где $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены степени n; для функции

$$P_n(x)\sin kx \text{ (II) или } R_n(x)\cos kx \tag{III}$$

первообразная должна иметь вид суммы:

$$S_n(x)\sin kx + T_n(x)\cos kx, \qquad \text{(II')}$$

где $P_n(x)$, $R_n(x)$, $S_n(x)$, $T_n(x)$ — многочлены степени n. В каждом из отмеченных случаев при вычислении интеграла может быть применён метод неопределённых коэффициентов, содержание которого сводится к следующему:

1) Интеграл от данной функции (I), (II) или (III) приравнивают соответствующей первообразной (I') или (II'), в которой многочлены $Q_n(x)$, $S_n(x)$, $T_n(x)$ записывают с неопределёнными коэффициентами;

2) дифференцируют обе части написанного равенства;

3) приравнивают коэффициенты в обеих частях равенства при подобных слагаемых $x^l e^{kx}$, $x^l \sin kx$ и $x^l \cos kx$;

4) решают полученную систему уравнений и определяют коэффициенты многочленов $Q_n(x)$, $S_n(x)$, $T_n(x)$.

Пример. Вычислить интеграл $\int (x^3 - 2x^2 + 5)\, e^{3x}\, dx$.

Решение. Первообразная функция должна иметь вид произведения показательной функции на многочлен третьей степени, а потому составим равенство:

$$\int (x^3 - 2x^2 + 5)\, e^{3x}\, dx = (A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0)\, e^{3x} + C.$$

Дифференцируя обе части последнего равенства, получим:

$$(x^3 - 2x^2 + 5)\, e^{3x} = e^{3x}[3A_3x^3 + 3x^2(A_2 + A_3) + \\ + x(3A_1 + 2A_2) + (3A_0 + A_1)].$$

Приравниваем коэффициенты при подобных слагаемых и получаем систему:

$$\begin{array}{rl} 1 = 3A_3 & \text{(коэффициенты при } x^3) \\ -2 = 3A_2 + 3A_3 & (\quad » \qquad\quad » \quad x^2) \\ 0 = 3A_1 + 2A_2 & (\quad » \qquad\quad » \quad x\,) \\ 5 = 3A_0 + A_1 & \text{(свободные члены).} \end{array}$$

Из этой системы находим: $A_3 = \frac{1}{3}$, $A_2 = -1$, $A_1 = \frac{2}{3}$, $A_0 = \frac{13}{9}$.

Следовательно,

$$\int (x^3 - 2x^2 + 5)\, e^{3x}\, dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{13}{9}\right) e^{3x} + C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int (x^2 + x + 1)\sin x\, dx$.

Решение. Так как вид первообразной функции нам известен, то мы можем написать равенство:

$$\int (x^2+x+1)\sin x\,dx=(A_0+A_1x+A_2x^2)\sin x+$$
$$+(B_0+B_1x+B_2x^2)\cos x+C.$$

Дифференцируем обе части равенства и получаем:

$$(x^2+x+1)\sin x=\sin x\,[(A_1-B_0)+(2A_2-B_1)\,x-B_2x^2]+$$
$$+\cos x\,[(A_0+B_1)+(A_1+2B_2)\,x+A_2x^2].$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых слагаемых, получаем систему уравнений:

$1=A_1-B_0$	(коэффициенты	при		$\sin x$)
$1=2A_2-B_1$	(»	»	x	$\sin x$)
$1=-B_2$	(»	»	x^2	$\sin x$)
$0=A_0+B_1$	(»	»		$\cos x$)
$0=A_1+2B_2$	(»	»	x	$\cos x$)
$0=A_2$	(»	»	x^2	$\cos x$).

Решая систему, получаем: $A_2=0$; $B_2=-1$; $B_1=-1$; $A_0=1$; $A_1=2$; $B_0=1$. Следовательно,

$$\int (x^2+x+1)\sin x\,dx=(-x^2-x+1)\cos x+(2x+1)\sin x+C.$$

Вычислить интегралы.

214. $\int x^2\sin x\,dx$ (отв.: $2x\sin x+(2-x^2)\cos x+C$)

215. $\int (x^2-x+3)\,e^x\,dx$ (отв.: $e^x(x^2-3x+6)+C$)

216. $\int x^3e^{3x}\,dx$ (отв.: $\frac{e^{3x}}{27}(9x^3-9x^2+6x-2)+C$)

217. $\int (x^2-3x)\sin x\,dx$ (отв.: $(2x-3)\sin x-$
$-(x^2-3x-2)\cos x+C$)

Этим же методом можно пользоваться при вычислении интегралов типа $\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n. Из теоретического курса известно, что всегда можно найти такие постоянные величины A_0, A_1, A_2, ..., A_{n-1}, B, для которых справедливо равенство:

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=(A_0x^{n-1}+A_1x^{n-2}+A_2x^{n-3}+\ldots+$$
$$+A_{n-2}x+A_{n-1})\sqrt{ax^2+bx+c}+B\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}. \qquad \text{(I)}$$

Вычисление интегралов данного типа следует проводить по следующей схеме:

1) Дифференцировать обе части равенства (I).

2) В равенстве, полученном после дифференцирования, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x.

3) Решая систему уравнений, полученную в результате приравнивания коэффициентов, найти коэффициенты A_0, A_1, $A_2, \ldots, A_{n-1}$, B.

4) Подставить найденные коэффициенты в равенство (I) и вычислить интеграл, перед которым стоит коэффициент B.

Пример. Вычислить интеграл $\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$.

Решение. Пользуясь равенством (I), запишем:

$$\int \frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx = (A_0 x^2 + A_1 x + A_2)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + B\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}. \qquad \text{(I')}$$

Дифференцируем обе части равенства и получаем:

$$\frac{x^3 - x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} = (2A_0 x + A_1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + (A_0 x^2 + A_1 x + A_2)\frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} + \frac{B}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}.$$

Умножаем обе части равенства на $\sqrt{x^2 + 2x + 2}$:

$$x^3 - x + 1 = (2A_0 x + A_1)(x^2 + 2x + 2) + (A_0 x^2 + A_1 x + A_2)(x + 1) + B.$$

Раскроем скобки в правой части равенства и расположим полученный многочлен по убывающим степеням x:

$$x^3 - x + 1 = 3A_0 x^3 + x^2(2A_1 + 5A_0) + x(4A_0 + 3A_1 + A_2) + (A_2 + 2A_1 + B).$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства и получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} 1 &= 3A_0 \\ 0 &= 2A_1 + 5A_0 \\ -1 &= 4A_0 + 3A_1 + A_2 \\ 1 &= A_2 + 2A_1 + B. \end{aligned}$$

Решая систему, находим:

$$A_0 = \frac{1}{3}, \quad A_1 = -\frac{5}{6}, \quad A_2 = \frac{1}{6}, \quad B = \frac{5}{2}.$$

Подставим найденные значения в равенство (I') и интегрируем:

$$\int\frac{x^3-x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+$$
$$+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}\right)\sqrt{x^2+2x+2}+$$
$$+\frac{5}{2}\ln\left|(x+1)+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}\,dx$.

Решение. Метод неопределённых коэффициентов можно применить и к данному интегралу. Преобразуем подинтегральную функцию так, чтобы в числителе дроби стоял многочлен, а в знаменателе квадратный корень из трёхчлена второй степени:

$$\int(x^2+1)\sqrt{x^2+x+1}\,dx=\int\frac{(x^2+1)(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx=$$
$$=\int\frac{x^4+x^3+2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx.$$

Для вычисления последнего интеграла используем метод неопределённых коэффициентов. Составим равенство:

$$\int\frac{x^4+x^3+2x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx=$$
$$=(A_0x^3+A_1x^2+A_2x+A_3)\sqrt{x^2+x+1}+B\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.\quad (\mathrm{I}')$$

Далее нужно: 1) Дифференцировать обе части равенства (I'). 2) В равенстве, полученном после дифференцирования, приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x. 3) Решить систему и найти коэффициенты. Подставить найденные коэффициенты в равенство (I') и вычислить интеграл. Всё это проделайте самостоятельно.

Вычислить интегралы.

218. $\int\frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}}\,dx$

$\left(\text{отв.: } \left(\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{6}x+\frac{7}{6}\right)\sqrt{x^2+2x-1}-\right.$
$\left.-2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x-1})+C\right)$

219. $\int\frac{2x^2-3x}{\sqrt{x^2-2x+5}}\,dx$ (отв.: $x\sqrt{x^2-2x+5}-$
$-5\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C$)

220. $\int\sqrt{3x^2-5x+1}\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{6x-5}{12}\sqrt{3x^2-5x+1}-\right.$
$\left.-\frac{13\sqrt{3}}{72}\ln(6x-5+\sqrt{36x^2-60x+12})+C\right)$

ГЛАВА ВТОРАЯ

ОПРЕДЕЛЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Вычисление определённых интегралов непосредственным суммированием

Пусть на сегменте $[a, b]$ дана непрерывная функция $f(x)$ и нужно вычислить определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, как предел суммы $\sum\limits_{i=1}^{i=n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, при условии, что число промежуточных точек неограниченно возрастает, а длины частичных сегментов $[x_{k-1}, x_k]$ стремятся к нулю.

В теоретическом курсе доказано, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то предел этой суммы существует и равен определённому числу, которое не зависит ни от способа разбиения сегмента $[a, b]$ на частичные сегменты, ни от выбора точки ξ_i в каждом из частичных сегментов. Вычисление интеграла в данном случае следует проводить по следующему плану:

1. Между числами a и b взять ряд промежуточных чисел x_1, $x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}$ так, чтобы сегмент $[a, b]$ был разбит по определённому закону на частичные сегменты. Положить $a = x_0$ и $b = x_n$. В каждом отдельном случае нужно подобрать наиболее удобный для вычисления закон разбиения сегмента на частичные.

2. В каждом частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ нужно выбрать наиболее удобное для дальнейших вычислений число ξ_k.

3. Составить интегральную сумму:

$$S = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \ldots +$$
$$+ f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

4. Преобразовать сумму к виду, удобному для вычисления предела, и вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_a^b x\,dx$ непосредственным суммированием.

Решение. 1. Разобьём сегмент $[a, b]$ на n равных частей точками:

$$x_0 = a;\quad x_1 = a + \frac{b-a}{n};\ x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n};\ x_3 = a + \frac{3(b-a)}{n};\ \ldots;$$
$$x_{n-1} = a + \frac{(n-1)(b-a)}{n};\ x_n = b.$$

2. В каждом частичном сегменте $[x_k, x_{k+1}]$ возьмём самую левую точку x_k.

3. Составим интегральную сумму для функции $f(x) = x$, учитывая, что $f(x_k) = a + \frac{k(b-a)}{n}$ и $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots +$$
$$+ f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = a\cdot\frac{b-a}{n} + \left(a + \frac{b-a}{n}\right)\frac{b-a}{n} +$$
$$+ \left(a + \frac{2(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n} + \ldots + \left(a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}\right)\frac{b-a}{n} =$$
$$= \frac{b-a}{n}\left[a + \left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \left(a + \frac{2(b-a)}{n}\right) + \left(a + \frac{3(b-a)}{n}\right) +\right.$$
$$\left.+ \ldots + \left(a + \frac{(n-1)(b-a)}{n}\right)\right] = \frac{b-a}{n}\left[n\cdot a + \frac{b-a}{n}(1 + 2 + 3 +\right.$$
$$\left.+ \ldots + (n-1)\right] = \frac{b-a}{n}\left[na + \frac{(b-a)(n-1)}{2}\right] = (b-a)\times$$
$$\times\left[a + \frac{b-a}{2}\cdot\frac{n-1}{n}\right].$$

4. Вычислим предел интегральной суммы:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n\to\infty}\left[(b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\cdot\frac{n-1}{n}\right)\right] =$$
$$= (b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\right) = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Итак,

$$\int\limits_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_a^b e^x dx$ непосредственным суммированием.

Решение. Разделим сегмент $[a, b]$ на равные части точками:

$$x_0 = a;\quad x_1 = a + \frac{b-a}{n};\quad x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n};\ \ldots;\ x_{n-1} = a + \\ + \frac{(b-a)(n-1)}{n};\quad x_n = b.$$

В каждом частичном сегменте $[x_k, x_{k+1}]$ возьмём самую правую точку и составим интегральную сумму для функции $f(x) = e^x$, учитывая, что $f(x_k) = e^{a+\frac{k(b-a)}{n}} = e^a \cdot e^{\frac{k(b-a)}{n}}$ и $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$. Получим:

$$\sum_{k=1}^{k=n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{k=n} e^a e^{\frac{k(b-a)}{n}} \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} e^a (e^{\frac{b-a}{n}} + \\ + e^{\frac{2(b-a)}{n}} + e^{\frac{3(b-a)}{n}} + \ldots + e^{\frac{n(b-a)}{n}}) = \frac{b-a}{n} e^a \cdot \frac{e^{\frac{b-a}{n}} - e^{b-a} e^{\frac{b-a}{n}}}{1 - e^{\frac{b-a}{n}}}.$$

Вычислим предел интегральной суммы:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k=n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \cdot e^a \cdot \frac{e^{\frac{b-a}{n}} - e^{b-a} \cdot e^{\frac{b-a}{n}}}{1 - e^{\frac{b-a}{n}}}$$

$\left(\text{введём обозначение } \frac{b-a}{n} = h;\ \text{если } n \to \infty, \text{ то } h \to 0\right) =$

$$= \lim_{h\to 0} he^a \frac{e^h - e^{b-a}e^h}{1 - e^h} = \lim_{h\to 0} e^a (1 - e^{b-a}) \frac{he^h}{1 - e^h} = (e^a - e^b) \lim_{h\to 0} \frac{he^h}{1 - e^h} =$$

(полагаем $1 - e^h = z$; отсюда $e^h = 1 - z$, $h = \ln(1 - z)$; если $h \to 0$, то $z \to 0$) $= (e^a - e^b) \lim\limits_{z\to 0} \frac{(1-z)\ln(1-z)}{z} =$

$$= (e^a - e^b) \lim_{z\to 0} \{-(1-z)\ln(1-z)^{-\frac{1}{z}}\} = e^b - e^a.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^b \cos x\,dx$ непосредственным суммированием.

Решение. Разобьём сегмент $[0, b]$ точками $a = x_0$; $x_1 = \frac{b}{n}$; $x_2 = \frac{2b}{n}$; ...; $b = x_n$ на n равных частей. Длина частичного сегмента равна $x_к - x_{k-1} = \frac{b}{n}$. В каждом сегменте возьмём самую правую точку и составим сумму:

$$\sum_{k=1}^{k=n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{k=n} \cos x_k \cdot \frac{b}{n} = \frac{b}{n}\left[\cos\frac{b}{n} + \cos\frac{2b}{n} + \right.$$

$$\left. + \cos\frac{3b}{n} + \ldots + \cos\frac{nb}{n}\right].$$

Далее преобразуем стоящую в скобках сумму к виду, удобному для вычисления предела:

$\cos\frac{b}{n} + \cos\frac{2b}{n} + \cos\frac{3b}{n} + \ldots + \cos\frac{nb}{n}$ (умножим и разделим сумму на $2\sin\frac{b}{2n}$) $= \frac{1}{2\sin\frac{b}{2n}}\left(2\cos\frac{b}{n}\sin\frac{b}{2n} + 2\cos\frac{2b}{n}\sin\frac{b}{2n} + \right.$

$\left. + 2\cos\frac{3b}{n}\sin\frac{b}{2n} + \ldots + 2\cos\frac{nb}{n}\sin\frac{b}{2n}\right) =$ (каждое слагаемое представим в виде разности синусов) $= \frac{1}{\sin\frac{b}{2n}}\left[\left(\sin\frac{3b}{2n} - \sin\frac{b}{2n}\right) + \right.$

$$+ \left(\sin\frac{5b}{2n} - \sin\frac{3b}{2n}\right) + \left(\sin\frac{7b}{2n} - \sin\frac{5b}{2n}\right) + \ldots + \left(\sin\frac{(2n+1)b}{2n} - \right.$$

$$\left.\left. - \sin\frac{(2n-1)b}{2n}\right)\right] = \frac{1}{2\sin\frac{b}{2n}}\left[\sin\frac{(2n+1)b}{2n} - \sin\frac{b}{2n}\right].$$

Теперь вычислим предел интегральной суммы:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n} \cos x_k \cdot \frac{b}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b}{n}\cdot\frac{1}{2\sin\frac{b}{2n}}\left[\sin\left(1 + \frac{1}{2n}\right)b - \sin\frac{b}{2n}\right] = \sin b,$$

так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b}{2n}}{\sin\frac{b}{2n}} = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\sin\left(1 + \frac{1}{2n}\right)b = \sin b \text{ и } \lim_{n\to\infty}\sin\frac{b}{2n} = 0.$$

Итак,

$$\int_0^b \cos x\, dx = \sin b.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_a^b x^2 dx$, разбивая сегмент $[a, b]$ так, чтобы абсциссы точек деления составляли геометрическую прогрессию.

Решение. Подберём знаменатель прогрессии так, чтобы последний член прогрессии был равен b. Абсциссы точек деления будут:

$$x_0 = a;\; x_1 = aq;\; x_2 = aq^2;\; x_3 = aq^3,\; \ldots,\; x_n = aq^n = b,$$

где q — знаменатель прогрессии. Пользуясь равенством

$$aq^n = b, \tag{1}$$

определяем знаменатель прогрессии $q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$;
отсюда

$$n = \frac{\ln \frac{b}{a}}{\ln q}.$$

Если $n \to \infty$, то знаменатель прогрессии $q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ стремится к единице.

Составим интегральную сумму для функции $f(x) = x^2$, взяв в каждом частичном сегменте самую левую точку:

$$\sum_{k=1}^{k=n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = a^2(aq - a) + a^2q^2(aq^2 - aq) +$$
$$+ a^2q^4(aq^3 - aq^2) + \ldots + a^2q^{2(n-1)}(aq^n - aq^{n-1}) = a^3(q-1) +$$
$$+ a^3q^3(q-1) + a^3q^6(q-1) + \ldots + a^3q^{3(n-1)}(q-1) =$$
$$= a^3(q-1)[1 + q^3 + q^6 + \ldots + q^{3(n-1)}] = a^3(q-1)\frac{1-q^{3n}}{1-q^3} =$$
$$= a^3\frac{q^{3n}-1}{q^2+q+1} = a^3\frac{(q^n)^3-1}{q^2+q+1} = a^3\frac{\frac{b^3}{a_3}-1}{q^2+q+1} = \frac{b^3-a^3}{q^2+q+1},$$

так как $q^n = \frac{b}{a}$ (см. равенство 1).

Вычислим предел интегральной суммы:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{k=n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) = \lim_{q\to 1}\frac{b^3-a^3}{q^2+q+1} = \frac{b^3-a^3}{3}.$$

Итак,

$$\int_a^b x^2dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

Непосредственным суммированием вычислить определённые интегралы.

221. Вычислить $\int_a^b dx$, разбивая сегмент $[a, b]$ на равные части.

(отв.: $b - a$)

222. Вычислить $\int_0^b x^2dx$, разбивая сегмент $[0, b]$ на равные части.

$\left(\text{отв.: } \frac{b^3}{3}\right)$

223. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 a^x dx$, разбивая сегмент $[0, 1]$ на равные части. $\left(\text{отв.: } \frac{a-1}{\ln a}\right)$

§ 2. Связь между определённым интегралом и неопределённым

Вычисление определённых интегралов можно производить с помощью неопределённого интегрирования. Если $F(x)$ есть любая первообразная функции $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ следует вычислять по формуле:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Правую часть последнего равенства обычно обозначают так:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Знак $\Big|_a^b$ называется знаком двойной подстановки; он указывает, что в функцию $F(x)$ нужно подставить вместо x сначала число b, а затем число a и из первого результата $F(b)$ вычесть второй $F(a)$.

Пример. $(x^2+x+1)\Big|_1^2 = (2^2+2+1)-(1^2+1+1)=4.$

Пример. $\arcsin x\Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$

Пример. $\ln(x+\sqrt{x^2+9})\Big|_0^4 = \ln(4+\sqrt{4^2+9}) - \ln(0+\sqrt{0+9}) = \ln 9 - \ln 3 = \ln 3.$

Для вычисления определённого интеграла с помощью неопределённого интегрирования следует: 1) вычислить неопределённый интеграл; 2) взять первообразную функцию $F(x)$ и вычислить $F(x)\Big|_a^b$.

Пример. $\int\limits_0^1 (x+1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{x^3dx}{1+x^8}$.

Решение. Сначала вычислим неопределённый интеграл:

$$\int \frac{x^3\,dx}{1+x^8} = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3\,dx}{1+(x^4)^2} = \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} x^4 + C.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{1+x^8} = \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}(\operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0) = \frac{\pi}{16}.$$

Вычислить интегралы с помощью неопределённого интегрирования.

224. $\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{2}{3}\right)$ **224 (а).** $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\,dx$ (отв.: $1 - 2\ln 2$)

225. $\int_0^3 \frac{dx}{9+x^2}$ $\left(\text{отв.: } \frac{\pi}{12}\right)$ **225 (а).** $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx$ (отв.: 0)

226. $\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{\pi}{8}\right)$ **226 (а).** $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}\right)$

227. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx$ (отв.: 0)

228. $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+2)^3}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{8}\ln\frac{3}{2} - \frac{19}{576}\right)$

229. $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^2}$ $\left(\text{отв.: } 1 - \frac{\pi}{4}\right)$

230. $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2}$ $\left(\text{отв.: } \frac{\pi}{2}\right)$ **230 (а).** $\int_{-2}^{-4} \frac{dx}{1-x^2}$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}\ln\frac{6}{5}\right)$

231. $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x^2-1}$ $\left(\text{отв.: } \ln\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ **231 (а).** $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x}$ (отв.: $-\ln 2$)

232. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\,dx$ $\left(\text{отв.: } -\ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **232 (а).** $\int_0^1 \sqrt[m]{x^n}\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{m}{m+n}\right)$

§ 3. Замена переменной в определённом интеграле

Пусть требуется вычислить определённый интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, где $f(x)$ — функция непрерывная на сегменте $[a, b]$. Введём новую переменную t, полагая $x = \varphi(t)$ и подчинив функцию $\varphi(t)$ следующим условиям: 1) $\varphi(t)$ определена и непрерывна на некотором сегменте $[\alpha, \beta]$; 2) на сегменте $[\alpha, \beta]$ существует непрерывная производная $\varphi'(t)$; 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$; когда t изменяется на сегменте $[\alpha, \beta]$, функция $\varphi(t)$ принимает значения, принадлежащие сегменту $[a, b]$. Тогда имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt. \qquad (A)$$

Из приведённой формулы видно, что при вычислении определённого интеграла с помощью замены переменной нет необходимости возвращаться к старой переменной x, как это приходилось делать при вычислении неопределённого интеграла. Надо только найти первообразную функцию, как функцию новой независимой переменной t, и из значения этой функкии в точке β вычесть значение функции в точке α.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Решение. В данном случае целесообразно применить подстановку $x = a\sin t$, $dx = a\cos t\,dt$, так как эта подстановка приводит подинтегральную функцию к рациональному виду.

Установим законность такой замены переменной. Под интегралом дана функция $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$, непрерывная на сегменте $[0, a]$. Функция $\varphi(t) = a\sin t$ монотонно возрастает и имеет непрерывную производную $\varphi'(t) = a\cos t$ на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, причём $\varphi(0) = 0$ и $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = a$. Когда t изменяется на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, функция $x = \varphi(t)$ возрастает и принимает значения, принадлежащие сегменту $[0, a]$.

Пользуемся равенством (A) и получаем:

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x^4}\,dx$.

Решение. Преобразуем подинтегральную функцию к рациональному виду подстановкой $x = a\sec t$, $dx = a\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$. Такая подстановка является законной, так как функция $\varphi(t) = a\sec t$ монотонно возрастает и имеет непрерывную производную $\varphi'(t) = \frac{a\sin t}{\cos^2 t}$ на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, причём $\varphi(0) = a$ и $\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2a$;

когда t изменяется в сегменте $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, функция $x=\varphi(t)$ возрастает и принимает значения из сегмента $[a, 2a]$.

Пользуемся равенством (A) и получаем:

$$\int_a^{2a} \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^4} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{a^2 \sec^2 t - a^2}}{a^4 \sec^4 t} a \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt = \frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \cos t \, dt =$$

$$= \frac{1}{a^2} \frac{\sin^3 t}{3} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3a^2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{8a^2}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}}$.

Решение. Преобразуем подинтегральную функцию при помощи подстановки $2+4x=t$ (1), $x=\frac{t-2}{4}$, $dx=\frac{dt}{4}$. Вычислим пределы интегрирования для новой независимой переменной t; подставляя в равенство (1) пределы интегрирования для переменной x, получаем:

$$2+4\cdot 1=\alpha, \quad \alpha=6$$
$$2+4\cdot 4=\beta, \quad \beta=18.$$

Функция $x=\frac{t-2}{4}$ возрастает на сегменте $[6, 18]$ и принимает значения из $[1, 4]$. Пользуемся равенством (A) и получаем:

$$\int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}} = \int_6^{18} \frac{t-2}{4\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{4} = \frac{1}{16} \int_6^{18} \left(\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{16} \left(\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{t}\right)\Bigg|_6^{18} = \frac{1}{16}\left(\frac{2\cdot 18^{\frac{3}{2}}}{3} - 4\sqrt{18} - \frac{2\cdot 6^{\frac{3}{2}}}{3} + 4\sqrt{6}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

Решение. Воспользуемся подстановкой $\sqrt{x}=t$; отсюда $x=t^2$ и $dt=2t\,dt$. Если $x=0$, то $\sqrt{0}=\alpha$ и $\alpha=0$; если $x=4$, то $\sqrt{4}=\beta$ и $\beta=2$, так как функция возрастает в сегменте $[0, 2]$. Итак, независимая переменная t изменяется на сегменте $[0, 2]$. Выполняем подстановку и получаем:

$$\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{2t\,dt}{1+t} = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{1+t} dt = 2\int_0^2 dt - 2\int_0^2 \frac{dt}{1+t} =$$

$$= 2t\Big|_0^2 - 2\ln(1+t)\Big|_0^2 = 4 - 2\ln 3.$$

Вычислить интегралы с помощью замены переменной.

233. $\int\limits_0^a \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}$. Подстановка $x=a\sin^2 t$. (отв.: π)

234. $\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. Подстановка $x=a\sin t$. $\left(\text{отв.: } \frac{\pi a^4}{16}\right)$

235. $\int\limits_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}\,dx}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3}$. Подстановка $x-2=z^3$. $\left(\text{отв.: } 8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi\right)$

236. $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{(x-x^3)^{\frac{1}{3}}}{x^4}\,dx$. Подстановка $x=\frac{1}{z}$. (отв.: 6)

В примерах, приведённых ниже, студент должен самостоятельно подобрать подстановку, наиболее удобную для вычисления определённого интеграла.

237. $\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{3}{8}\pi a^4\right)$

238. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{4-\pi}{2}\right)$

239. $\int\limits_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$ (отв.: $4-\pi$)

240. $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$ $\left(\text{отв.: } \frac{\pi}{\sqrt{5}}\right)$

При вычислении определённых интегралов пользуются формулой интегрирования по частям, которая имеет вид:

$$\int\limits_a^b f(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = f(x)\cdot\varphi(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b \varphi(x)f'(x)\,dx.$$

Пример. $\int\limits_0^1 xe^x\,dx = xe^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x\,dx = e - e^x\Big|_0^1 = e-e+1=1.$

Вычислить интегралы.

241. $\int\limits_1^2 (\ln x)^2\,dx$ (отв.: $2(\ln 2-1)^2$)

242. $\int\limits_0^1 x^2e^x\,dx$ (отв.: $e-2$)

243. $\int\limits_0^1 x^3 \operatorname{arc\,tg} x\, dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{1}{6}\right)$

244. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx$ (отв.: 0)

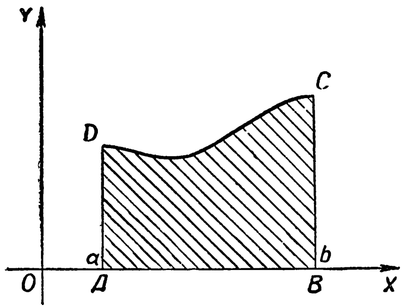
245. $\int\limits_0^1 x \operatorname{arc\,tg} x\, dx$ $\left(\text{отв.: } \frac{\pi-2}{4}\right)$

246. $\int\limits_0^{2\pi} x^2 \sin x\, dx$ (отв.: $-4\pi^2$)

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛА

§ 4. Площадь в прямоугольных координатах

Ниже займёмся вычислением площадей плоских фигур при помощи интегралов. Прежде всего рассмотрим задачу об определении площади криволинейной трапеции $ABCD$ (черт. 1). Эта площадь ограничена снизу отрезком AB, составляющим часть оси OX, с боков — ординатами AD и BC, а сверху — кривой DC, уравнение которой $y=f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная и положительная функция на сегменте $[a, b]$.



Черт. 1.

В этом случае площадь вычисляется по формуле:

пл. $ABCD = \int\limits_a^b f(x)\, dx$, где a и b — абсциссы точек A и B.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной дугой параболы $y=x^2+1$, прямой $x=4$ и осями координат (черт. 2).

Решение. пл. $ABCO = \int\limits_0^4 (x^2+1)\, dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^4 =$

$$= \frac{4^3}{3} + 4 = \frac{76}{3}.$$

Решите следующие задачи.

247. Вычислить площадь, ограниченную осью OX, гиперболой $xy=1$ и прямыми $x=2$ и $x=4$. (отв.: $\ln 2$)

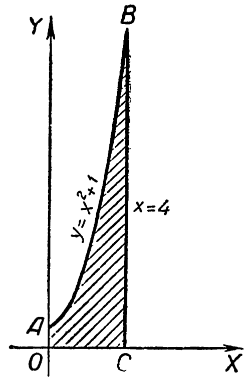
248. Вычислить площадь, ограниченную осью OX, кривой $y=2+\sin x$ и прямыми $x=\pi$ и $x=2\pi$. [отв.: $2(\pi-1)$]

249. Вычислить площадь, ограниченную осью OX, кривой $y=e^x$, осью OY и прямой $x=1$. (отв.: $e-1$)

250. Вычислить площадь, ограниченную кривой $y=\ln x$, осью OX и прямыми $x=2$ и $x=4$. [отв.: $(6\ln 2-2)$]

251. Вычислить площадь, ограниченную цепной линией $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)$, осями координат и прямой $x=a$.

$\left[\text{отв.: } \frac{a^2}{2e}(e^2-1)\right]$



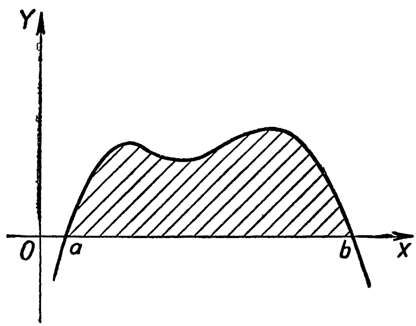
Черт. 2.

Если площадь ограничена кривой $y=f(x)$ и осью OX (черт. 3), то нужно вычислить абсциссы точек пересечения кривой с осью OX и затем вычислить площадь по формуле:

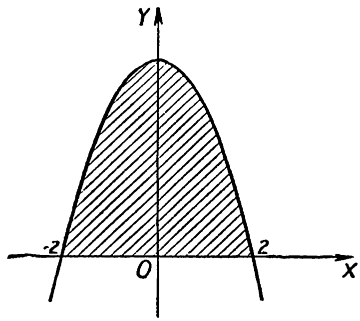
$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

Пример. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y=4-x^2$ и осью OX.

Решение. Площадь изображена на чертеже 4. Найдём абсциссы точек пересечения параболы с осью OX:



Черт. 3.



Черт. 4.

$$4-x^2=0; \quad x_1=-2; \quad x_2=2.$$

Следовательно,

$$S=\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2}=\left(8-\frac{8}{3}\right)-$$

$$-\left(-8+\frac{8}{3}\right)=\frac{32}{3}.$$

Так как искомая площадь симметрична относительно оси OY, то можно было вычислить половину площади и полученный результат удвоить:

$$S = 2\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = 2\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

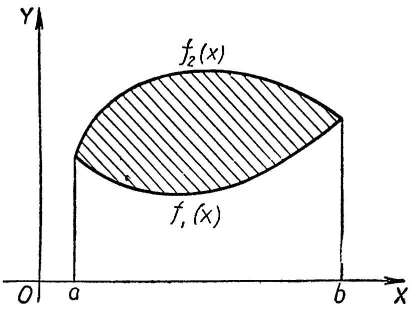
Решите следующие задачи.

252. Найти площадь круга $x^2 + y^2 = r^2$. (отв.: πr^2)

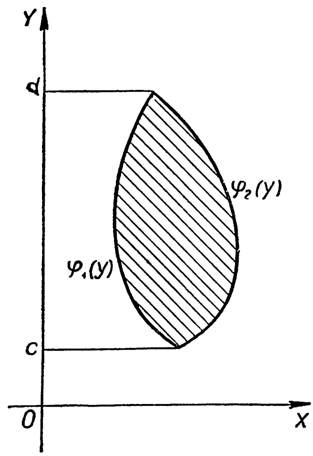
253. Найти площадь, содержащуюся между координатными осями и параболой $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$. $\left(\text{отв.: } \frac{a^2}{6}\right)$

254. Найти площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. (отв.: πab)

Если площадь ограничена двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ (черт. 5) или $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$ (черт. 6), то нужно вычислить



Черт. 5.



Черт. 6.

координаты точек пересечения кривых и затем вычислить площадь по формуле:

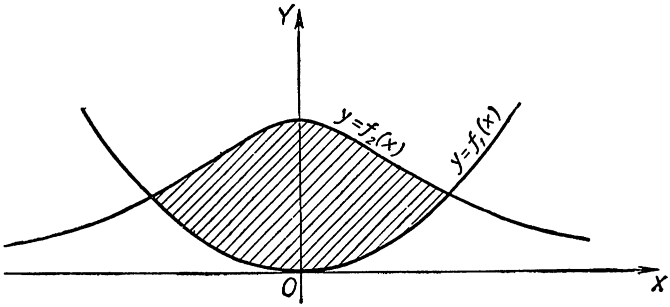
$$S = \int_a^b \{f_2(x) - f_1(x)\}\,dx \quad \text{(черт. 5)},$$

или:

$$S = \int_c^d \{\varphi_2(y) - \varphi_1(y)\}\,dy \qquad \text{(черт. 6)}.$$

Пример. Найти площадь, заключённую между параболой $x^2 = 4ay$ и кривой $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$.

Решение. Искомая площадь (черт. 7) симметрична относительно оси OY, а потому можно вычислить половину площади и результат удвоить. Для определения пределов интегрирования найдём абсциссы точек пересечения данных кривых, решив систему уравнений: $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$, $y=\frac{x^3}{4a}$.



Черт. 7.

Получаем: $A(-2a, a)$, $B(2a, a)$. В данном случае

$$f_2(x)=\frac{8a^3}{x^2+4a^2} \quad \text{и} \quad f_1(x)=\frac{x^2}{4a}.$$

Пользуясь формулой, получим:

$$S=2\int_0^{2a}\left(\frac{8a^3}{x^2+4a^2}-\frac{x^2}{4a}\right)dx=2\left(4a^2\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2a}-\frac{x^3}{12a}\right)\Bigg|_0^{2a}=$$

$$=2\left(4a^2\operatorname{arc\,tg}1-\frac{2}{3}a^2\right)=2\left(\pi a^2-\frac{2}{3}a^2\right)=2a^2\left(\pi-\frac{2}{3}\right).$$

Пример. Найти площадь, заключённую между параболами $x=y^2$ и $x=\frac{3}{4}y^2+1$ (черт. 8).

Решение. Решая систему $x=y^2$, $x=\frac{3}{4}y^2+1$, находим координаты точек пересечения: $A(4, -2)$, $B(4, 2)$. Так как площадь симметрична относительно оси OX, то можно вычислить половину площади.

В данном случае $\varphi_2(y)=\frac{3}{4}y^2+1$ и $\varphi_1(y)=y^2$.

Пользуясь формулой, получим:

$$S=2\int_0^2\left\{\left(\frac{3}{4}y^2+1\right)-y^2\right\}dy=2\int_0^2\left(1-\frac{1}{4}y^2\right)dy=$$

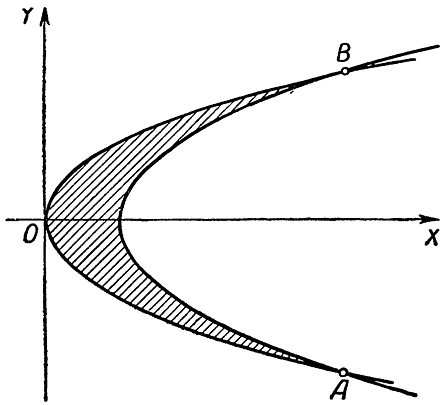
$$=2\left(y-\frac{y^3}{12}\right)\Bigg|_0^2=2\left(2-\frac{8}{12}\right)=\frac{8}{3}.$$

Решите следующие задачи.

255. Найти площадь, содержащуюся между параболой $y^2=2x$ и окружностью $y^2=4x-x^2$. (отв.: 0,950)

256. Найти всю площадь между кривой $y=x^3$ и прямой $y=2x$. (отв.: 2)

257. Найти площадь, содержащуюся между двумя параболами: $y^2=2px$ и $x^2=2py$. $\left(\text{отв.: } \frac{4}{3}p^2\right)$



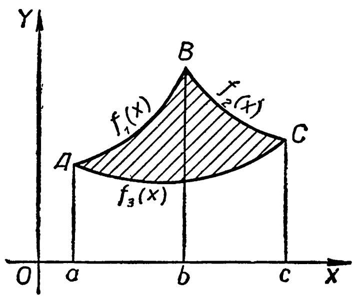
Черт. 8.

258. Вычислить площадь, ограниченную прямой $y=2x+3$ и параболой $y=x^2$. $\left(\text{отв.: } 10\frac{2}{3}\right)$

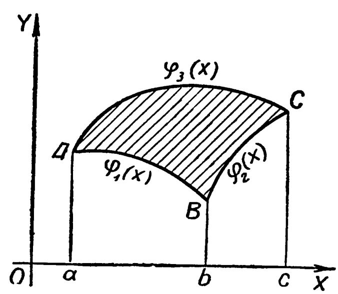
259. Определить площадь фигуры, ограниченной параболами: $y^2=2x$, $y=\frac{1}{4}x^2$ и $y=3-\frac{x^2}{2}$. (отв.: 8)

260. Найти общую площадь, ограниченную кривыми, заданными уравнениями: $x^2+4y^2=8$ и $x^2-3y^2=1$. $\left(\text{отв.: } \frac{6\pi-2\sqrt{3}\ln(2+\sqrt{3})}{3}\right)$

Если площадь ограничена сверху или снизу дугами нескольких кривых (черт. 9 и 10), то для вычисления нужно разбить эту площадь на части прямыми, параллельными оси OY, так, чтобы каждая часть была ограничена только одной кривой как



Черт. 9.



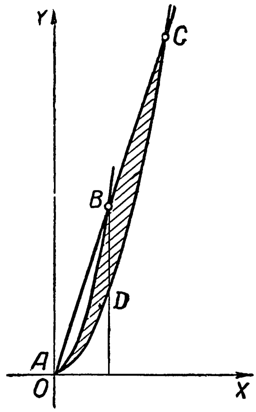
Черт. 10.

сверху, так и снизу. На рисунках 9 и 10 площадь нужно разбить на две части прямой, параллельной оси OY и проходящей через точку B. В этих случаях площадь определяют по формуле:

$$S=\int_a^b\{f_1(x)-f_3(x)\}\,dx+\int_b^c\{f_2(x)-f_3(x)\}\,dx.$$

Формула соответствует чертежу 9.

Пример. Вычислить площадь, заключённую между параболами $y=x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$ и прямой $y=3x$ (черт. 11).



Черт. 11.

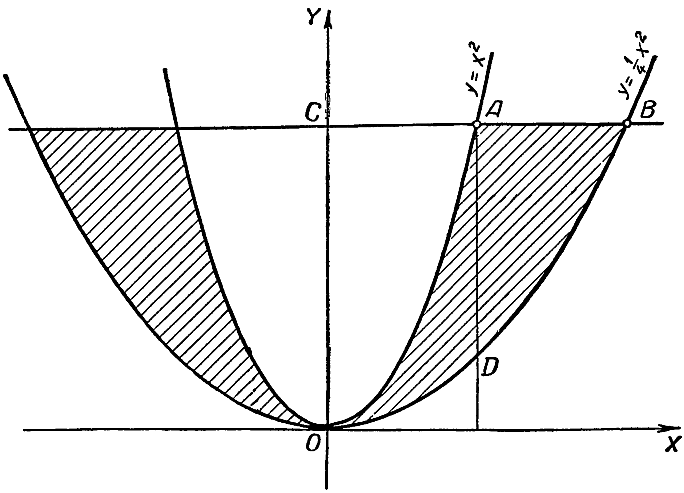
Решение. Сверху площадь ограничена дугой параболы $y=x^2$ и отрезком прямой $y=3x$, а снизу дугой параболы $y=\frac{1}{2}x^2$. Для вычисления нужно разбить площадь на две части прямой BD, параллельной оси OY, и определить координаты точек B и C. Решая систему $\begin{cases} y=x^2 \\ y=3x \end{cases}$, находим $A\,(0,\ 0)$; $B\,(3,\ 9)$, а из системы $\begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ y=3x \end{cases}$ определяем $A\,(0,\ 0)$, $C\,(6,\ 18)$.

Вычисляем площадь по формуле:

$$S=\int_0^3\left(x^2-\frac{1}{2}x^2\right)dx+\int_3^6\left(3x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\frac{x^3}{6}\Bigg|_0^3+$$

$$+\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_3^6=\frac{27}{6}+(54-36)-\left(\frac{27}{2}-\frac{27}{6}\right)=13\frac{1}{2}.$$

Пример. Вычислить площадь, ограниченную дугами парабол: $y=x^2$, $y=\frac{1}{4}x^2$ и прямой $y=4$ (черт. 12).



Черт. 12.

Решение. Можно вычислить половину площади (так как фигура симметрична относительно оси OY) и полученный результат удвоить.

1-й способ. В данном случае целесообразнее интегрировать по переменной y. Искомая площадь равна удвоенной разности площадей OBC и OAC. Следовательно,

$$S=2\left(\int_0^4 2\sqrt{y}\,dy-\int_0^4\sqrt{y}\,dy\right)=2\int_0^4\sqrt{y}\,dy=\frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}\Big|_0^4=$$

$$=\frac{4}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}=\frac{32}{3}=10\frac{2}{3}.$$

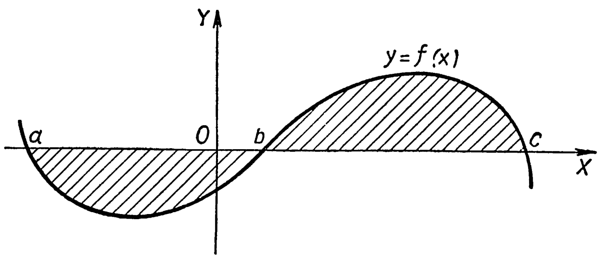
2-й способ. Если вычислять площадь интегрированием по переменной x, то прежде всего нужно найти абсциссы точек A и B.

Решая системы $\begin{cases} y=x^2 \\ y=4 \end{cases}$ и $\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2 \\ y=4 \end{cases}$, получаем $A(2, 4)$, $B(4, 4)$.

Так как площадь сверху ограничена дугой параболы и прямой, то её нужно разбить на две части прямой AD, параллельной оси OY. Пользуясь формулой, получим:

$$S=2\left\{\int_0^2\left(x^2-\frac{1}{4}x^2\right)dx+\int_2^4\left(4-\frac{1}{4}x^2\right)dx\right\}=2\left\{\frac{x^3}{4}\Big|_0^2+\right.$$

$$\left.+\left(4x-\frac{x^3}{12}\right)\Big|_2^4\right\}=2\left\{\frac{8}{4}+\left(16-\frac{64}{12}\right)-\left(8-\frac{8}{12}\right)\right\}=\frac{32}{3}.$$



Черт. 13.

Решите следующие задачи.

261. Интегрированием вычислить площадь, ограниченную прямыми $y=x$, $x+y=4$ и $y=3x$. (отв.: 2)

262. Вычислить площадь, ограниченную прямой $x+y=2$, кубической параболой $y=x^3$ и осью OX. $\left(\text{отв.: } \frac{3}{4}\right)$

263. Найти площадь, ограниченную кривой $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. $\left(\text{отв.: } \frac{3}{8}\pi a^2\right)$

264. Найти площадь, ограниченную параболами $y=(x+1)^2$, $y=(x-1)^2$ и осью OX. $\left(\text{отв.: } \frac{2}{3}\right)$

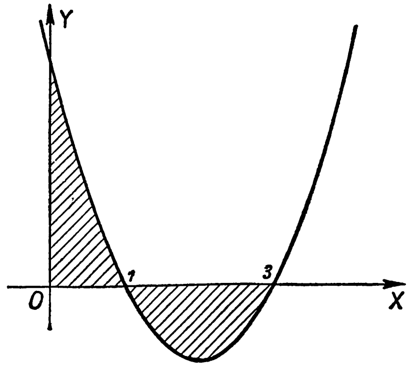
265. Вычислить площадь, ограниченную кривыми $y=e^x$, $y=e^{-x}$ и прямой $x=1$. $\left(\text{отв.: } e+\frac{1}{e}-2\right)$

Если искомая площадь расположена частично над осью OX, а частично под осью (черт. 13), то для вычисления пользуются формулой:

$$S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|+\left|\int_b^c f(x)\,dx\right|.$$

Пример. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y=x^2-4x+3$ и осями координат.

Решение. Искомая площадь изображена на рисунке 14. Пользуясь приведённой выше формулой, получаем:



Черт. 14.

$$S=\left|\int_0^1 (x^2-4x+3)\,dx\right|+\left|\int_1^3 (x^2-4x+3)\,dx\right|=\left|\frac{x^3}{3}-\right.$$

$$\left.-2x^2+3x\right|_0^1+\left|\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right|_1^3=\left|\frac{1}{3}-2+3\right|+\left|(9-18+9)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{3}-2+3\right)\right|=\frac{8}{3}.$$

Решить следующие задачи.

266. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, осью ординат, прямой $x=2$ и кривой $y=(x-1)^3$. $\left(\text{отв.: } \frac{1}{2}\right)$

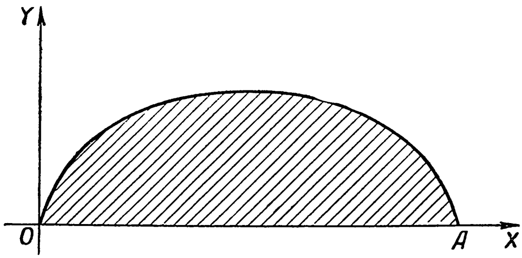
267. Вычислить площадь, ограниченную кривой $y=\sin x$, осью OX и прямыми $x=\frac{\pi}{2}$ и $x=\frac{5}{3}\pi$. $\left(\text{отв.: } 2\right)$

268. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y=1-x^2$, осью OX и прямой $x=2$. $\left(\text{отв.: } \frac{8}{3}\right)$

269. Найти площадь двух сегментов, отсекаемых от кривой $y=x+\sin x$ прямой $y-x=0$ (сегменты симметричны относительно начала координат). (отв.: 2)

§ 5. Вычисление площадей, ограниченных кривыми, уравнения которых заданы в параметрическом виде или в полярных координатах

Пример. Вычислить площадь, ограниченную одной дугой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью OX.



Черт. 15.

Решение. Искомая площадь изображена на чертеже 15. Прежде всего нужно найти пределы интегрирования по переменной t. Ординаты точек O и A равны нулю, а потому значения t, соответствующие этим точкам, можно найти из уравнения $0=a(1-\cos t)$. Получаем: $t_1=0$, $t_2=2\pi$. Следовательно,

$$S=\int_a^b y\,dx=\int_0^{2\pi}\underbrace{a(1-\cos t)}_{y}\underbrace{a(1-\cos t)\,dt}_{dx}=$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=a^2(t-2\sin t)\Big|_0^{2\pi}+a^2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=2\pi a^2+\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=3\pi a^2.$$

Решите следующие задачи.

270. Вычислить площадь верхней половины круга $x=r\cos t$, $y=r\sin t$. $\left(\text{отв.: } \frac{\pi r^2}{2}\right)$

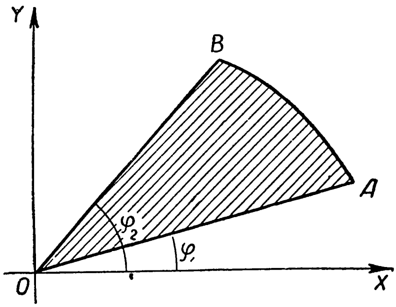
271. Вычислить площадь эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. (отв.: πab)

272. Найти площадь, ограниченную кривой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$. $\left(\text{отв.: } \frac{3}{8}\pi a^2\right)$

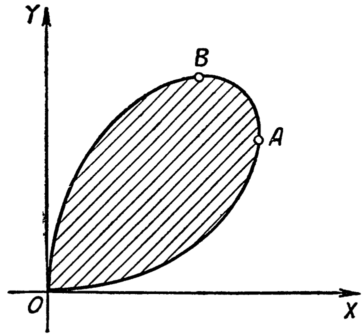
Пусть AB — дуга кривой, уравнение которой $\rho=f(\varphi)$ дано в полярных координатах. Площадь сектора (черт. 16), ограниченного дугой AB и радиусами-векторами OA и OB, вычисляют по формуле $S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\rho^2\,d\varphi$, где φ_1 и φ_2 — значения независимой переменной φ, соответствующие точкам A и B.

Пример. Найти площадь, ограниченную одним завитком кривой $r=a\sin 2\theta$.

Решение. Искомая кривая изображена на чертеже 17. Нужно вычислить площадь, лежащую в первом квадранте. При изменении аргумента θ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ получается завиток, а отсюда следует, что пределы интегрирования 0 и $\frac{\pi}{2}$. Начальной точке границы соответствует $\theta=0$, а конечной точке $\theta=\frac{\pi}{2}$. Площадь, ограниченную завитком, вычисляем по формуле, данной выше, и получаем:



Черт. 16.

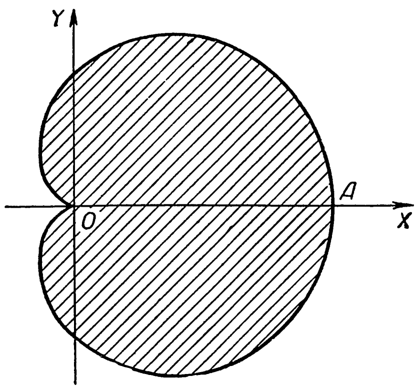


Черт. 17.

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\rho^2 d\rho=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^2 2\theta\, d\theta=\frac{a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\, d\theta=$$

$$=\frac{a^2}{4}\left(\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi a^2}{8}.$$

Пример. Вычислить площадь, содержащуюся внутри кардиоиды $r=a(1+\cos\theta)$.



Черт. 18.

Решение. Искомая площадь изображена на чертеже 18. Так как площадь симметрична относительно оси OX, то можно вычислить верхнюю её часть и результат удвоить. Пределы интегрирования 0 и π, так как точке A соответствует $\theta=0$, а точке O соответствует $\theta=\pi$. При изменении θ от 0 до π получается верхняя половина кривой. Применяя формулу, получим:

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int_0^\pi a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta=a^2\int_0^\pi(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta=$$

$$=a^2(\theta+2\sin\theta)\Big|_0^\pi+\frac{a^2}{2}\int_0^\pi(1+\cos 2\theta)\,d\theta=$$

$$=\pi a^2+\frac{a^2}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\Big|_0^\pi=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

Решите следующие задачи.

273. Вычислить площадь круга $r=a$. (отв.: πa^2)

274. Вычислить площадь круга $r=a\cos\varphi$. $\left(\text{отв.: } \frac{\pi a^2}{4}\right)$

275. Вычислить площадь одной петли кривой

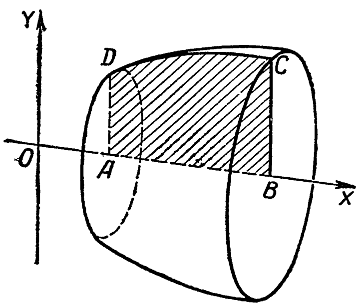
$$\rho=a\cos 2\theta. \qquad \left(\text{отв.: } \frac{1}{8}\pi a^2\right)$$

276. Вычислить площадь, описываемую радиусом-вектором спирали Архимеда $\rho=a\theta$, при одном его обороте, при начале движения от $\theta=0$. $\left(\text{отв.: } \frac{4}{3}\pi^3 a^2\right)$

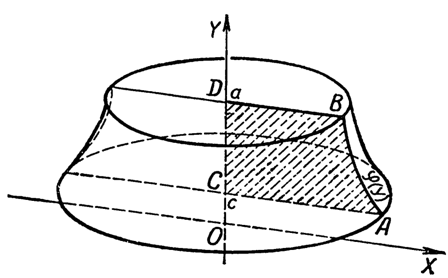
277. Найти всю площадь, ограниченную кривой $\rho^2=a^2\cos 2\theta$. (отв.: a^2)

§ 6. Объём тела вращения

Объём тела, образованного вращением вокруг оси OX площади $ABCD$ (черт. 19), ограниченной кривой $y=f(x)$, осью OX и прямыми $x=a$ и $x=b$, вычисляют по формуле:



Черт. 19.



Черт. 20.

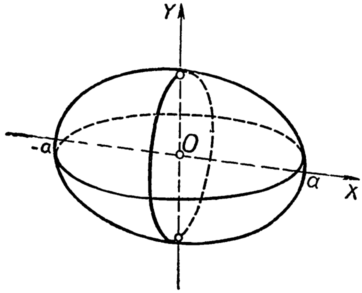
$$v=\pi\int_a^b y^2dx.$$

Если осью вращения будет OY, то объём тела (черт. 20) вычисляют по формуле:

$$V=\pi\int_c^d x^2dy.$$

Пример. Вычислить объём тела, образуемого вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси OX (черт. 21).

Решение. Из уравнения кривой получаем: $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$. Объём вычисляем по формуле, данной выше:



Черт. 21.

$$V=\pi\int\limits_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\,dx=\frac{b^2\pi}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Пример. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси OY площади, ограниченной осями координат и параболой $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$.

Решение. Тело образовано вращением площади OAB (черт. 22) вокруг оси OY. Пределами интегрирования будут ординаты точек O и A, т. е. 0 и a. Из уравнения кривой получаем $x=(a^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})^2$. Искомый объём равен:

$$V=\pi\int\limits_0^a x^2dy=\pi\int\limits_0^a(a^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})^4dy=\pi\int\limits_0^a(a^2-4a^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+6ay-$$
$$-4a^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}}+y^2)\,dy=\pi\left(a^2y-\frac{8}{3}a^{\frac{3}{2}}y^{\frac{3}{2}}+3ay^2-\frac{8}{5}a^{\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{2}}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_0^a=\frac{1}{15}\pi a^3.$$

Решите следующие задачи.

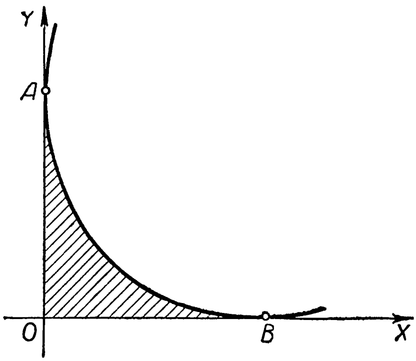
278. Вычислить объём тела, образованного вращением одной ветви синусоиды $y=\sin x$ вокруг оси OX. $\left(\text{отв.: } \frac{\pi^2}{2}\right)$

279. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси OX площади, ограниченной осью абсцисс и параболой $y=2x-x^2$. $\left(\text{отв.: } \frac{16}{15}\pi\right)$

280. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси OX площади, ограниченной цепной линией

$$y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

осью OX и прямыми $x=\pm a$. $\left[\text{отв.: } \frac{\pi a^3}{4}(e^2-4-e^{-2})\right]$



Черт. 22.

281. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси OY той части параболы $y^2=4ax$, которая отсекается прямой $x=a$.

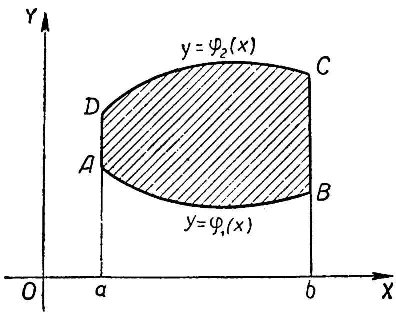
$\left(\text{отв.: } \frac{16}{5}\pi a^3\right)$

282. Найти объём тела, образованного вращением гипоциклоиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ вокруг оси OX.

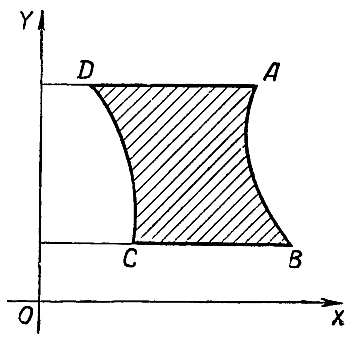
$\left(\text{отв.: } \frac{32}{105}\pi a^3\right)$

283. Посредством интегрирования найти объём конуса, производимого вращением вокруг оси OX части прямой $4x-5y+3=0$, содержащейся между осями координат. $\left(\text{отв.: } \frac{9}{100}\pi\right)$

Объём тела, образованного вращением вокруг оси OX площади $ABCD$ (черт. 23), ограниченной кривыми $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ и прямыми $x=a$, $x=b$, вычисляют по формуле:



Черт. 23.



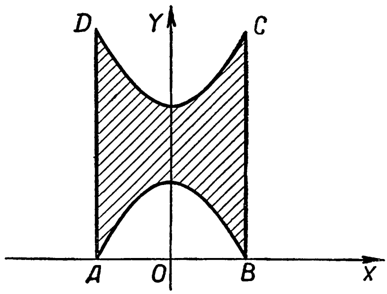
Черт. 24.

$$V=\pi\int\limits_a^b\{[\varphi_2(x)]^2-[\varphi_1(x)]^2\}\,dx.$$

Если объём образован вращением площади $ABCD$ (черт. 24) вокруг оси OY, то для вычисления пользуются формулой:

$$V=\pi\int_c^d\{[f_2(y)]^2-[f_1(y)]^2\}\,dy.$$

Пример. Вычислить объём, образованный вращением вокруг оси OX площади, ограниченной параболами: $y=1-x^2$, $y=x^2+2$ и прямыми $x=-1$, $x=1$.



Черт. 25.

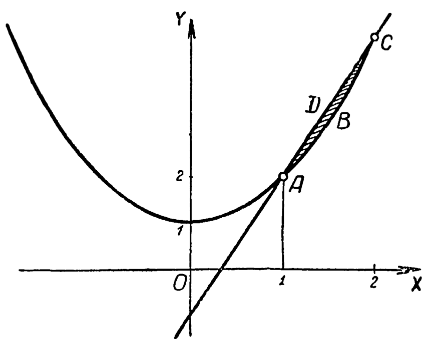
Решение. Тело образовано вращением площади $ABCD$ (черт. 25) вокруг оси OX. В данном случае $\varphi_1(x)=1-x^2$, $\varphi_2(x)=x^2+2$. Пределы интегрирования -1 и $+1$. Пользуясь формулой, вычислим объём тела:

$$V=\pi\int_{-1}^{+1}\{(x^2+2)^2-(1-x^2)^2\}\,dx=\pi\int_{-1}^{1}(6x^2+3)\,dx=$$

$$=\pi(2x^3+3x)\Big|_{-1}^{+1}=10\pi.$$

Пример. Вычислить объём тела, образованного вращением вокруг оси OX площади, ограниченной параболой $y=x^2+1$ и прямой $y=3x-1$.

Решение. Тело образовано вращением площади $ABCD$ (черт. 26) вокруг оси OX. Пределами интегрирования будут абсциссы точек A и C. Решаем систему $\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=3x-1 \end{cases}$ и получаем $x_1=1$, $x_2=2$. В этом случае $\varphi_1(x)=x^2+1$ и $\varphi_2(x)=3x-1$.



Черт. 26.

Следовательно,

$$V=\pi\int_1^2\{(3x-1)^2-(x^2+1)^2\}\,dx=\pi\int_1^2(7x^2-6x-x^4)\,dx=\pi\left(\frac{7}{3}x^3-3x^2-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_1^2=$$
$$=\frac{17}{15}\pi.$$

Решите следующие задачи.

284. Найти объём кольца, производимого вращением круга $x^2+(y-b)^2=a^2$ вокруг оси OX $(b>a>0)$. (отв.: $2\pi^2a^2b$)

285. Интегрированием найти объём тела, образованного вращением вокруг оси OX площади, ограниченной прямыми $y=x+1$, $y=2x+1$ и $x=2$. (отв.: 12π)

286. Найти объём тела, происшедшего от вращения вокруг оси OX фигуры, ограниченной гиперболой $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, прямой $2ay-bx=0$ и осью абсцисс. $\left(\text{отв.: } \frac{4\sqrt{3}-6}{9}\pi b^2 a\right)$

287. Вычислить объём тела, которое образуется при вращении одной ветви циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ вокруг оси абсцисс. (отв.: $5\pi^2 a^3$)

§ 7. Вычисление длины плоской кривой

Если плоская кривая задана уравнением $y=f(x)$ и функция $f(x)$ имеет непрерывную производную, то длину дуги этой кривой вычисляют по формуле:

$$s=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx,$$

где a и b — абсциссы, соответствующие концам дуги, или по формуле:

$$s=\int_c^d \sqrt{1+(x')^2}\,dy,$$

где c и d — ординаты, соответствующие концам дуги.

Пример. Вычислить длину дуги параболы $y^2=4x$ от $x=0$ до $x=1$.

Решение. Здесь удобнее применить вторую формулу, так как x выражается рационально через y. Берём уравнение $x=\frac{1}{4}y^2$ и находим производную $x'=\frac{1}{2}y$. Теперь нужно найти пределы интегрирования по y. Из уравнения кривой находим, что при $x=0$ будет $y=0$, а при $x=1$ будет $y=2$. Итак, пределы интегрирования 0 и 2. Функция имеет непрерывную производную, следовательно:

$$s=\int_0^2 \sqrt{1+\frac{y^2}{4}}\,dy=\frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{4+y^2}\,dy=\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}).$$

Решите следующие задачи.

288. Найти длину дуги кривой $y=e^x$, содержащейся между точками (0,1) и (1, e).

[отв.: $\sqrt{1+e^2}-\sqrt{2}+\ln(\sqrt{1+e^2}-1)-1-\ln(\sqrt{2}-1)$]

289. Вычислить длину дуги кривой $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$, содержащейся между точками, для которых $y=1$ и $y=2$.

$\left(\text{отв.: } \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2\right)$

290. Вычислить длину дуги цепной линии $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, содержащейся между точками, для которых $x=-a$ и $x=a$. $\left[\text{отв.: } a\left(e-\frac{1}{e}\right)\right]$

291. Вычислить длину кривой $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. (отв.: $6a$)

292. Вычислить длину дуги полукубической параболы $ay^2=x^3$ от начала координат до точки с абсциссой $x=5a$. $\left(\text{отв.: } \frac{335}{27}a\right)$

Если уравнение кривой задано в параметрической форме $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ и существуют непрерывные производные $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ на сегменте $[t_1, t_2]$, причём на этом сегменте обе производные одновременно не обращаются в нуль, то длину дуги кривой вычисляют по формуле:

$$s=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt,$$

где t_1 и t_2 — значения параметра, соответствующие концам дуги.

Решите задачи.

293. Вычислить длину ветви циклоиды: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$. (отв.: $8a$)

294. Вычислить длину дуги эволюты круга:

$$x=a(\cos\theta+\theta\sin\theta),\ \ y=a(\sin\theta-\theta\cos\theta),$$

содержащуюся между $\theta=0$ и $\theta=2\pi$. (отв.: $2\pi^2 a$)

295. Вычислить длину дуги кривой $x=a\cos^3\varphi$, $y=a\sin^3\varphi$, если t меняется от 0 до 2π. (отв.: $6a$)

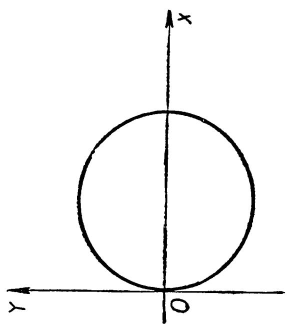
Если уравнение кривой задано в полярных координатах $r=\varphi(\theta)$ и функция имеет непрерывную производную $\varphi'(\theta)$, то длину кривой вычисляют по формуле:

$$s=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{dr^2+r^2d\theta^2},$$

где α и β — значения выбранной независимой переменной, соответствующие концам дуги.

Пример. Вычислить длину окружности $r=2a\cos\theta$.

Решение. Окружность изображена на чертеже 27. Вся окружность получается при изменении θ от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Эти значения являются пределами интегрирования по переменной θ. Составим подинтегральное выражение:



Черт. 27.

$$r=2a\cos\theta,\ \ dr=-2a\sin\theta d\theta,\ \ \sqrt{dr^2+r^2d\theta^2}=$$
$$=\sqrt{4a^2\sin^2\theta d\theta^2+4a^2\cos^2\theta d\theta^2}=2ad\theta.$$

Пользуясь формулой, получаем:

$$s=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2a\,d\theta = 2a\theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi a.$$

Решите следующие задачи:

296. Вычислить длину первого оборота спирали $r=a\theta$.

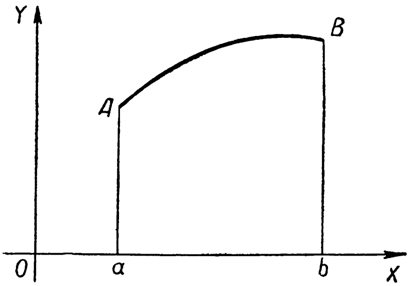
$$\left(\text{отв.: } \pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)\right)$$

297. Найти длину кардиоиды $r=a(1+\cos\theta)$. (отв.: $s=8a$)

298. Найти всю длину кривой $r=a\sin^3\frac{\theta}{3}$. $\left(\text{отв.: } \frac{3}{2}\pi a^2\right)$

§ 8. Вычисление площади поверхности тела вращения

Площадь поверхности, образованной вращением дуги AB кривой $y=f(x)$ (имеющей непрерывную производную) вокруг оси OX, вычисляют по формуле:



Черт. 28.

$$S=2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx,$$

где a и b — абсциссы, соответствующие концам дуги A и B (черт. 28). Если поверхность образована вращением дуги вокруг оси OY, то площадь вычисляют по формуле:

$$S=2\pi\int\limits_c^d x\sqrt{1+(x')^2}\,dy,$$

где c и d — ординаты, соответствующие концам A и B данной дуги.

Пример. Вычислить площадь поверхности, образуемой вращением кривой $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ вокруг оси OY.

Р е ш е н и е. Поверхность образована вращением дуги ABC, изображённой на чертеже 29. Мы вычислим верхнюю половину поверхности, т. е. ту её часть, которая образована вращением дуги AB. Пределы интегрирования по переменной y будут 0 и a. Из данного уравнения получаем:

$$x=\left(a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}};\quad \frac{dx}{dy}=-\frac{3}{2}\left(a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}};$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=\left(a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right)y^{-\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}-1.$$

Данная функция имеет непрерывную производную.

Для вычисления площади поверхности воспользуемся формулой:

$$\frac{S}{2}=2\pi\int_c^a x\sqrt{1+(x')^2}\,dy=2\pi\int_0^a (a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+a^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{2}{3}}-1}\,dy=$$

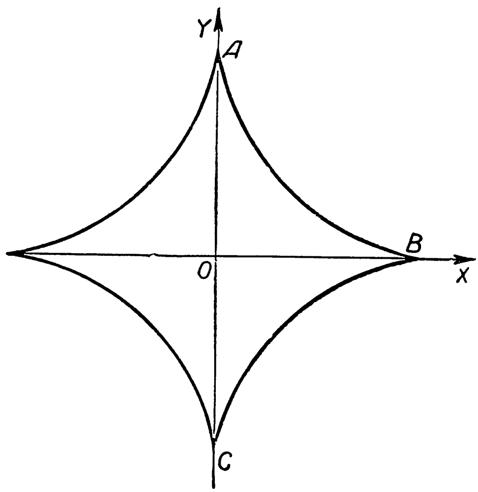
$$=2\pi\int_0^a (a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}}dy=-\frac{2}{5}2\pi\frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a=$$

$$=-\frac{6}{5}\pi a^{\frac{1}{3}}(-a^{\frac{5}{3}})=\frac{6}{5}\pi a^2.$$

Следовательно,

$$S=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

Пример. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX плоской фигуры, ограниченной кривыми: $y=x^2$ и $x=y^2$.



Черт. 29.

Решение. Искомая поверхность образована вращением фигуры $OABCO$ (черт. 30) вокруг оси OX. Решив систему $\begin{cases} y=x^2 \\ x=y^2, \end{cases}$ найдём координаты точки B (1, 1). Данные функции имеют непрерывные производные. Для вычисления всей поверхности нужно:

1) Вычислить площадь S_1, образованную вращением дуги OCB. 2) Вычислить площадь S_2, образованную вращением дуги OAB. 3) Найти сумму этих площадей $S=S_1+S_2$.

1) Вычислим площадь S_1. Из уравнения $x=y^2$ получаем:

$$y=+\sqrt{x},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1}{4x}.$$

Пользуясь формулой, находим площадь:

$$S_1=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx=2\pi\int_0^1\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{4x}}\,dx=$$

$$=2\pi\int_0^1\frac{\sqrt{4x+1}}{2}dx=\pi\int_0^1\sqrt{4x+1}\,dx=\frac{\pi}{6}(4x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=$$

$$=\frac{\pi}{6}(5^{\frac{3}{2}}-1)=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

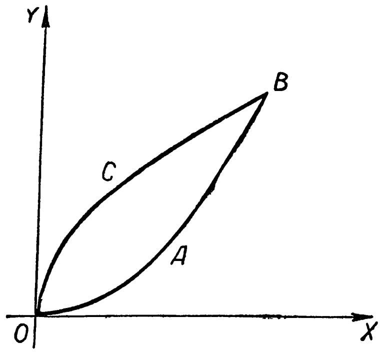
2) Вычислим площадь S_2. Из уравнения дуги OAB получим:

$$y=x^2, \quad \frac{dy}{dx}=2x, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=4x^2.$$

Пользуясь формулой, находим:

$$S_2=\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx=2\pi\int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx.$$

Все дальнейшие вычисления выполните самостоятельно.



Черт. 30.

Пример. Вычислить поверхность, образованную вращением одной ветви циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a\,(1-\cos t)$ вокруг оси OX.

Решение. Искомая поверхность образована вращением дуги OAB (черт. 31) вокруг оси OX. Пределы интегрирования по переменной t можно определить из уравнения $y=a(1-\cos t)$, полагая $y=0$. Получаем: $t_1=0$, $t_2=2\pi$. Из уравнения циклоиды находим:

$$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t), \quad \frac{dy}{dt}=a\sin t, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2=a^2(1-\cos t)^2,$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=a^2\sin^2 t.$$

Для вычисления площади поверхности пользуемся формулой:

$$S=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{dx^2+dy^2}=2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$

$$=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\,2\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=4\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}\,dt=$$

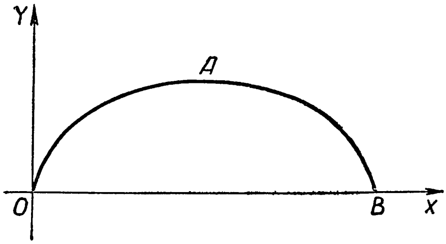
$$=8\pi a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt=8\pi a^2\left(-2\cos\frac{t}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

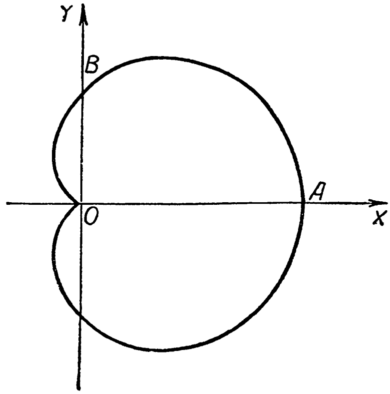
Пример. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $r = a(1 + \cos\theta)$ вокруг полярной оси.

Решение. Уравнение кривой дано в полярных координатах, и функция имеет непрерывную производную. Если вращение происходит вокруг оси, то вычисление площади производят по формуле:

$$S = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} y(\theta)\, ds,$$



Черт. 31.



Черт. 32.

где y выражаем через независимую переменную θ, а $ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$ (последняя формула была дана для вычисления дуги кривой, заданной в полярных координатах). Пользуясь формулой $y = r\sin\theta$, связывающей прямоугольные координаты с полярными, и заменяя в ней r выражением, данным в условии, т. е. $r = a\,(1 + \cos\theta)$, получим $y = (1 + \cos\theta)\sin\theta$. Итак, мы выразили y как функцию от θ.

Теперь вычислим

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \sqrt{a^2 \sin^2\theta d\theta^2 + a^2(1 + \cos\theta)^2 d\theta^2} = 2a\cos\frac{\theta}{2}\, d\theta.$$

Так как поверхность образована вращением дуги ABO (черт. 32), то пределы интегрирования равны 0 и π. Применим указанную выше формулу:

$$S = 2\pi \int_0^\pi y\, ds = 2\pi \int_0^\pi a\,(1 + \cos\theta)\sin\theta \cdot 2a \cdot \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^\pi 2\cos^2\frac{\theta}{2} \cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \cdot \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 16\pi a^2 \int_0^\pi \cos^4\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$

$$= -32\pi a^2 \left(\frac{\cos^5\frac{\theta}{2}}{5}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{32}{5}\pi a^2.$$

Решите следующие задачи.

299. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX части цепной линии $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, содержащейся между точками, для которых $x=a$ и $x=-a$.

$\left(\text{отв.: } \frac{\pi a^2}{2}\left(e^2-\frac{1}{e^2}+4\right)\right)$

300. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OY части кривой $y=1-x^2$, расположенной над осью абсцисс. $\left(\text{отв.: } \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)\right)$

301. Найти поверхность кольца, производимого вращением круга $x^2+(y-b)^2=a^2$ вокруг оси OX. (отв.: $4\pi^2 ab$)

302. Найти поверхность тела, образованного вращением кривой $r=a^2\cos\theta$ вокруг полярной оси. (отв.: πa^4)

303. Найти поверхность тела, образованного вращением прямой $y=kx+l$ вокруг оси OX в пределах для x от a до b.

$\left(\text{отв.: } 2\pi(b-a)\sqrt{1+k^2}\left[\frac{k}{2}(b+a)+l\right]\right)$

304. Найти поверхность тела, образованного вращением кривой $x^2+y(y-2b)=0$ вокруг оси OY. (отв.: $4\pi b^2$)

305. Вычислить поверхность, образованную вращением кривой $y=\sin x$ вокруг оси OX в пределах для x от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава первая

Неопределённые интегралы

Глава вторая

Определённые интегралы

Геометрические приложения интеграла

Редактор *Н. М. Остиану*
Технический редактор *Б. Л. Николаев.*

* * *

Сдано в набор 23/XII 1955 г. Подписано к печати 26/III 1956 г. $60 \times 92^1/_{16}$. Печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 6,57. Тираж 30 тыс. экз. А03464.

* * *

Учпедгиз. Москва, Чистые пруды, 6.

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической промышленности. Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова.
Москва, Ж-54, Валовая, 28.

Заказ № 1366. Цена 1 руб. 95 коп.

* * *

Отпечатано с готовых матриц
в г. Ростове-на-Дону в типографии имени Калинина Облполиграфиздата Управления культуры. Заказ № 2482.

Цена 1 руб. 95 коп.